Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Keine Hilfsmittel sind erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 36 Punkte. Man hat bestanden, wenn man mindestens 12 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**Summe**

Aufgabe 1: (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\dfrac{2+5i}{3+2i}$. (4 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| > 1\}$ in $\mathbb{C}$. (2 P.)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv $x_n := 2x_{n-1}(1 - x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x_0)^{(2^n)}$$

gilt. (6 P.)

(b) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (4 P.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$, sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ falls n ein Vielfaches von 3 ist und sonst $a_n := \sqrt[n]{3} - 1 - (-1)^n$.

(a) Untersuchen Sie, ob das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert und bestimmen Sie es gegebenenfalls. (3 P.)

(b) Untersuchen Sie, ob das Infimum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ existiert und bestimmen Sie es gegebenenfalls. (3 P.)

(c) Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (4 P.)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Ist $(a_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (4 P.)

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe reeller Zahlen. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. (3 P.)

(c) Seien X, Y und Z Mengen und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist g injektiv. (3 P.)