Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Keine Hilfsmittel sind erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben mit je 10 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 15 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie: f bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} z^n$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \frac{x^{2n}}{n} & (0 \leq x < 1), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

Überprüfen Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{Q}). \end{cases}$$

in dem Punkt $x = 0$ stetig ist.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion. Ist $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x)^2$ stetig, so auch f.