Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

12. Anleitung zum Selbststudium

(KW28)

Thema der Woche ist der Integralsatz von Gauß. Mein Abriß orientiert sich stark an der Darstellung in [Fo3, §15], ein wirklich überaus gelungenes Kapitel in einem lesenswerten Buch.

Hyperflächen und lokale Raumteilung

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, i.e. eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Nach Präsenzübung 9.5 ist H lokal als Urbild eines regulären Wertes darstellbar, i.e. für alle $p \in H$ existiert eine offene Umgebung U von p samt einer C^1-Abbildung $g : U \to \mathbb{R}$ mit

- $H \cap U = g^{-1}(\{0\})$,
- $dg(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Wir setzen $U^+ := \{x \in U \mid g(x) > 0$ und $U^- := \{x \in U \mid g(x) < 0\}$ und bemerken, daß $U^\pm$ offene Teilmengen von U (und auch von $\mathbb{R}^n$) sind. Damit erhalten wir eine disjunkte Zerlegung

$$U = U^+ \sqcup H \sqcup U^-$$

von U, welche wir die *lokale Separation von U durch H* bezeichnen. Weiter gilt für den Tangential- und Normalenraum an jedem Punkt $q \in H \cap U$:

$$N_qH = \mathbb{R} \cdot \operatorname{grad} g(q) \qquad \text{und} \qquad T_qH = (N_qH)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, \operatorname{grad} g(q)\rangle = 0\}\,.$$

Kompakta mit C^1-Rand

Eine kompakte Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kompaktum mit C^1-Rand*, falls für jedes $p \in \partial M$ eine offene Umgebung U samt einer C^1-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ existiert mit

- $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) \leq 0\}$,
- $dg(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Beachte $M = M^0 \sqcup \partial M$.

Beispiel. Sei $M = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Kugel mir Radius $r > 0$. Hier ist $M^0 = B_r(0)$ und $\partial M = r \cdot \mathbb{S}^{n-1}$. Weiter ist $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine offene Umgebung des gesamten Randes ∂M und $g(x) = \|x\|_2^2 - r^2$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Lemma. *Mit den Bezeichnungen von oben gilt:*

1. $M^0 \cap U = \{x \in U \mid g(x) < 0\}$.

2. $\partial M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Beweis. Da g stetig ist, ist $\{g(x) < 0\} \subset U$ offen und damit in $M^0 \cap U$ enthalten. Es genügt demnach zu zeigen, daß $\{g(x) = 0\}$ im Rand von M enthalten ist. Sei $q \in \{g(x) = 0\}$ und $v := \operatorname{grad} g(x)$. Beachte $v \neq 0$, da der Gradient nach Voraussetzung nicht verschwindet. Definiere $\phi(t) := g(q + tv)$ für $|t| < \epsilon$ und $\epsilon > 0$ klein genug, damit $q + tv \in U$. Mit Taylor und der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(0) + \phi'(0)t + R(t)\\ &= g(0) + t\langle \operatorname{grad} g(q), v\rangle + R(t)\\ &= t\|v\|^2 + R(t)\end{aligned}$$

mit einem Restterm $R \in o(t)$. Etwaige weitere Verkleinerung von $\epsilon > 0$ erlaubt es uns $|R(t)| < \frac{1}{2}\|v\|^2 t$ für alle $|t| < \epsilon$ anzunehmen. Damit ist $g(q + tv) > 0$ für alle $0 < t < \epsilon$ und $g(q + tv) < 0$ für alle $-\epsilon < t < 0$, i.a.W. $q + tv \in M \cap U$ für alle $0 < t < \epsilon$ und $q + tv \notin M \cap U$ für alle $-\epsilon < t < 0$. Ergo, jede Umgebung von q enthält Punkte, die sowohl in M als auch nicht in M liegen, i.e. q ist ein Randpunkt von M. □

Nach dem Lemma ist ∂M eine Hyperfläche. Für jedes $p \in \partial M$ wählen wir nun eine Umgebung U und eine C^1-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wie oben und setzen

$$\nu(p) := \frac{\operatorname{grad} g(p)}{\|\operatorname{grad} g(p)\|}\,.$$

Beachte: $\nu(p) \in N_p\partial M$ ist ein normierter Normalenvektor, i.e. $\nu(p) \in N_p\partial M$ mit $\|\nu(p)\| = 1$. Als solcher ist er eindeutig bis auf das Vorzeichen bestimmt. In dem Beweis von oben haben wir gesehen: $g(p + t\nu(p)) > 0$ für alle $0 < t < \epsilon$, d.h. $p + t\nu \notin M$ für $t > 0$, was wir dahingegen interpretieren, daß $\nu(p)$ aus dem Körper M heraus zeigt. Diese Eigenschaft bestimmt nun auch das Vorzeichen des normierten Normalenvektors $\nu(p)$ eindeutig. Die stetige Abbildung

$$\nu : \partial M \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad p \mapsto \nu(p) \in N_p\partial M\,,$$

wird als das *äußere Einheitsnormalenfeld von* M bezeichnet.

Der Integralsatz von Gauß: Formulierung und Heuristik

Für den Rest dieses Arbeitsblatts sei M ein Kompaktum mit C^1-Rand. Als solches ist M einschachtelbar (weshalb?). Desweiteren sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von M und $F : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, i.e. ein C^1-Vektorfeld. Wir erinnern an die *Divergenz* von F:

$$\operatorname{div} F : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{div} F(x);\ \operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)\,.$$

Bemerkung. (Bedeutung der Divergenz) *Zuerst ist die Divergenz eine koordinatenfreie Kenngröße des Vektorfeldes F. Aus $dF(x) = (\partial_j F_i)_{1\le i,j\le n}$ ergibt sich folgende Darstellung der Divergenz*

$$\operatorname{div} F(x) = \operatorname{tr} dF(x) = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} dF(x)} \lambda$$

und dies deutet bereits auf eine etwaige koordinatenfreiheit von $\operatorname{div} F(x)$ *hin, da die Spur einer Matrix A (z.B. $A = dF(x)$) nicht vom gewählten Koordinatensystem* *abhängt:* $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr} B$ *für jedes* $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*, da* $\operatorname{spec} B^{-1}AB = \operatorname{spec} A$*. Konkret, ist* $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^n$ *und* $B = [v_1, \dots, v_n]$*, so ist* $[v]_{\mathscr{B}} = B^{-1}v$ *für jedes* $v \in \mathbb{R}^n$*. Insbesondere gilt* $[F(x)]_{\mathscr{B}} = B^{-1}F(x)$*. Die Divergenz bezüglich* $\mathscr{B}$ *wäre dann*

$$\operatorname{div}_{\mathscr{B}} F(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{v_j} [F(x)]_{\mathscr{B},j} \,.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\mathscr{B}} F(x) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{v_j} \langle B^{-1}F(x), \mathbf{e}_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle B^{-1} dF(x)(v_j), \mathbf{e}_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle B^{-1} dF(x) B\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j\rangle \\
&= \operatorname{tr} dF(x) = \operatorname{div} F(x)\,.
\end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{div} F$ *in der Tat koordinatenfrei definiert. Weiter, da* $\operatorname{tr} dF(x)$ *die Summe der Eigenwerte von* $dF(x)$ *ist, interpretieren wir* $\operatorname{div} F(x)$ *als infinitesimales Fluß-Saldo des Vektorfeldes* F *an der Stelle* x*. In der Physik nennt man ein Vektorfeld quellenfrei, falls* $\operatorname{div} F = 0$*.*

Der Integralsatz von Gauß. *Sei* $V \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Teilmenge,* $F : V \to \mathbb{R}^n$ *ein* C^1*-Vektorfeld und* $M \subset V$ *ein Kompaktum mit* C^1*-Rand. Dann gilt:*

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\partial M} \langle F, \nu\rangle\,. \tag{G}$$

Bemerkungen. *(a) Da* M *einschachtelbar und* $\operatorname{div} F : V \to \mathbb{R}^n$ *stetig ist, ist*

$$\chi_M \cdot \operatorname{div} F : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \chi_M(x) \operatorname{div} F(x)$$

eine erweiterte Regelfunktion und damit integrierbar. Die Bezeichnung $\int_M \operatorname{div} F$ *steht abkürzend für*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) \operatorname{div} F(x)\; dx\,.$$

Ebenso hatten wir im letzten Blatt die Integrationstheorie allgemein auf Untermannigfaltigkeiten eingeführt, [S2, Satz 4.2.1]. Die Untermannigfaltigkeit hier ist die Hyperfläche ∂M *und* $\int_{\partial M} \langle F, \nu\rangle$ *steht für das Flächenintegral der stetigen Funktion*

$$x \mapsto \langle F(x), \nu(x)\rangle$$

über ∂M*. Manchmal wird dies auch mit* $\int_{\partial M} \langle F(x), \nu(x)\rangle\; dS(x)$ *und* $dS(x)$ *dem Flächemaß, welches lokal mittels Karten von* ∂M *berechnet wird (Stichwort: Gramsche Determinante.)*

(b) Ein Interessanter Spezialfall ist der von $n = 1$ *und* $M = I = [a, b]$ *ein abgeschlossenes Intervall. Hier ist* $\operatorname{div} F(x) = F'(x)$ *just die Ableitung von* $F : V \to \mathbb{R}$ *mit* $V \subset \mathbb{R}$ *einer offenen Menge, welche* I *umfasst. Weiter ist* $\partial M = \{a, b\}$ *eine Nulldimensionale Untermannigfaltigkeit mit* $\nu(a) = -1$ *und* $\nu(b) = +1$*. Allgemein ist eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit* $D \subset \mathbb{R}$ *eine diskrete Menge und das Fächenmaß die Summe der Dirac-Maße* $\sum_{x \in S} \delta_x$ *mit Integral*

$$\int_D f = \sum_{x \in D} \delta_x(f) = \sum_{x \in D} f(x) \qquad (f \in C_c(\mathbb{R}))\,.$$

Speziell erhalten wir für $D = \partial M = \{a, b\}$

$$\int_{\partial M} \langle F, \nu\rangle = F(b) - F(a)\,.$$

Somit entspricht der Gaußsche Integralsatz für $n = 1$ *dem Hauptsatz der Integral - und Differentialrechnung (HDI):*

$$\int_a^b F'(x)\ dx = F(b) - F(a)\,.$$

(c) Ein interessanter Fall ist der eines quellenfreien Vektorfeldes F*, i.e.* $\operatorname{div} F = 0$. *Der Gaußsche Integralssatz liefert dann*

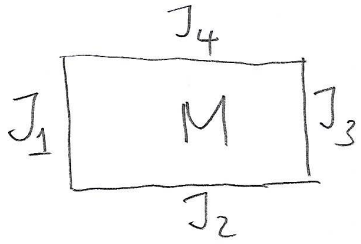
$$\int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle = 0\,.$$

In der Physik interpretiert man $\int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle$ *als den Fluß des Vektorfeldes durch den Körper* M*. Verschwindet die Divergenz, so ist der Fluß demnach null, i.a.W. Eintrittsmenge ist Austrittsmenge. Eine der Maxwellgleichungen lautet*

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho$$

mit $F = E$ *dem elektrischen Feld und* ρ *der Ladungsdichte. Im Fall einer quellenfreien Zone* M*, i.e.* $M \cap \operatorname{supp} \rho = \varnothing$*, besagt der Gauß:* $\int_{\partial M} \langle E, \nu \rangle = 0$*, i.e. kein elektrischer Fluß durch* M*.*

Kommen wir zur Heuristik und betrachten zuerst Quader $M = Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Strikt genommen fällt dies nicht unter die Voraussetzungen, da für $n \geq 2$ der Rand ∂M nicht C^1-ist (Ecken!). Das soll uns hier aber nicht stören (Formal sind die bösen Punkte eine Nullmenge und Soergel führt dazu in [S2] den Begriff der Fastfaltigkeit, um diese Art von Malheur zu umschiffen). Um die Idee zu erkennen, genügt es $n = 2$ zu betrachten, also $M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Der Rand ∂M besteht aus 4 (affinen) Intervallen: J_1, J_2, J_3, J_4



$$J_1 = \{a_1\} \times [a_2, b_2]$$
$$J_2 = [a_1, b_1] \times \{a_2\}$$
$$J_3 = \{b_1\} \times [a_2, b_2]$$
$$J_4 = [a_1, b_1] \times \{b_2\}$$

mit vier konstanten Einheitsnormalenfeldern (die nach außen zeigen müssen)

$$\nu_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \nu_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \nu_3 = \mathbf{e_1}, \quad \nu_4 = \mathbf{e}_2\,.$$

Eine Integrationskarte für J_1 ist durch

$$\phi_1 : [a_2, b_2] \to J_1, \quad t \mapsto (a_1, t)$$

gegeben mit $g(t) = \sqrt{\det d\phi_1(t)^T d\phi(t)} = 1$. Analog definieren wir Karten ϕ_j für $j = 2, 3, 4$. Somit erhalten wird für das Oberflächenintegral

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle &= \int_{J_1} \langle F, \nu_1 \rangle + \ldots + \int_{J_4} \langle F, \nu_4 \rangle \\
&= -\int_{J_1} F_1 - \int_{J_2} F_2 + \int_{J_3} F_1 + \int_{J_4} F_2 \\
&= -\int_{a_2}^{b_2} F_1(a_1, t)\ dt - \int_{a_1}^{b_1} F_1(t, a_2)\ dt + \\
&\quad + \int_{a_2}^{b_2} F_1(b_1, t)\ dt + \int_{a_1}^{b_1} F_1(t, b_2)\ dt
\end{aligned}
$$

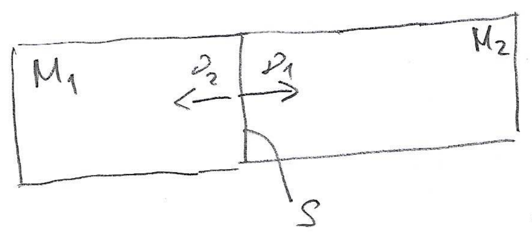
Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
\int_M \operatorname{div} F &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \partial_1 F(x,y) + \partial_2 F(x,y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 F(x,y)\ dx \right)\ dy + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \partial_2 F(x,y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{a_2}^{b_2} [F(b_1, y) - F(a_1, y)]\ dy + \int_{a_1}^{b_1} [F(x, b_2) - F(x, a_2)]\ dx
\end{aligned}
$$

und wir erkennen in der Tat Gleichheit der beiden Ausdrücke in (G). Hier haben wir zuerst benützt, daß die Reihenfolge der Integration beliebig ist ("Integralform" vom Satz von Schwarz [S2, Korollar 2.1.7], später heißt das "Fubini") und schließlich zweimal den HDI in einer Variablen.
Jetzt stellen wir eine weitere Überlegung an: Sei nun $M = M_1 \cup M_2$ eine Vereinigung von zwei kompakten Quadern mit disjunktem Inneren. Wir behaupten, daß das Randintregral geometrisch additiv ist:

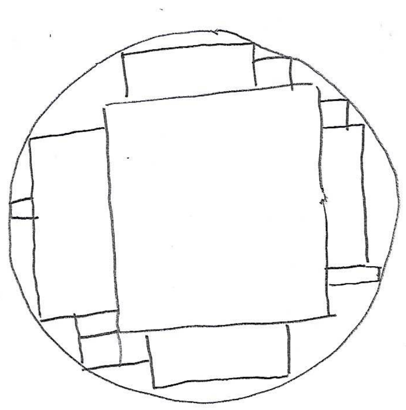
$$
\int_{\partial M} f = \int_{\partial M_1} f + \int_{\partial M_2} f\,.
$$

Der wesentliche Fall ist in folgender Skizze illustriert:



Die Randintegrale entlang der Schnittfläche heben sich weg

Die Erklärung für die Richtigkeit des Integralsatzes für den Ingenieur reduziert sich nun auf Skizzen folgender Art:



Ausschachtelung mit Quadern — alle inneren Randintegrale heben sich weg.

Der Gaußsche Integralsatz: Beweis

Glatte Teilung der Eins. Die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}} & \text{für } \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist glatt mit $\phi(0) = 1$ und $\operatorname{supp} \phi = \overline{B_1(0)}$. Folglich ist für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ die Funktion

$$\phi_{a,r}(x) := \phi(r^{-1}(x - a)) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

glatt mit $\operatorname{supp} \phi_{a,r} = \overline{B_r(a)}$. Damit haben wir gezeigt:

Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Dann existiert eine Funktion $\psi \in C_c^\infty(U)$ with $\phi \geq 0$ und $\phi(p) = 1$.*

Glatte Teilung der Eins. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche offene Überdeckung. Dann existieren $\psi_i \in C_c(V_i)$ mit $\phi_i \geq 0$ und*

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1 \qquad (x \in K)\,.$$

Beweis. Mit obigem Lemma folgt dies aus [S2, Lemma 4.14]; siehe auch [S2, Ergänzung 4.1.16]. □

Reduktion auf die lokale Situation. Für unser Kompaktum M mit C^1-Rand wählen wir nun für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p der folgenden Art:

- Ist $p \in M^0$, so wählen wir $U_p \subset M^0$.
- Ist $p \in \partial M$, so wählen wir $U_p = U$ mit einer C^1-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wie zuvor.

Nun ist $M \subset \bigcup_{p \in M} U_p$ und da M kompakt ist finden wir endlich viele U_p's, welche bereits ganz M überdecken; nennen wir sie $U_1, \ldots, U_m$. Sei nun $\phi_1, \ldots, \phi_m$ eine zugehörige glatte Teilung der Eins. Dann gilt

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) \cdot F(x) \qquad (x \in M)$$

und für jedes $1 \le i \le m$ ist $\phi_i \cdot F : V \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld mit $\operatorname{supp}(\phi_i \cdot F) \subset U_i$ (der Träger eines Vektorfeldes F ist die Vereinigung der Träger seiner n Komponenten F_k).

Angenommen der Gausssche Integralsatz gilt für alle C^1-Vektorfelder mit Träger in einem U_i. Dann

$$\int_M \operatorname{div}(\phi_i \cdot F) = \int_{\partial M} \langle \phi_i \cdot F, \nu \rangle$$

für jedes $1 \le i \le m$. Aufsummation und Linearität von div und des Integrals liefert einerseits

$$\sum_{i \in I} \int_M \operatorname{div}(\phi_i \cdot F) = \int_M \sum_{i \in I} \operatorname{div} \phi_i \cdot F = \int_M \operatorname{div}(\sum_{i \in I} \phi_i \cdot F) = \int_M \operatorname{div} F$$

und andererseits

$$\sum_{i \in I} \int_{\partial M} \langle \phi_i \cdot F, \nu \rangle = \int_{\partial M} \sum_{i \in I} \langle \phi_i \cdot F, \nu \rangle = \int_{\partial M} \langle \sum_{i \in I} \phi_i \cdot F, \nu \rangle = \int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle \,.$$

Fortan dürfen wir also $\operatorname{supp} F \subset U$ mit $U = U_i$ für ein $1 \le i \le m$ annehmen.

1. Fall $U \subset M^0$. Wegen $\operatorname{supp} F \subset U \subset M^0$, ist $\operatorname{supp} F \cap \partial M = \varnothing$ und das Oberflächenintegral $\int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle = 0$ verschwindet. Wir haben zu zeigen $\int_M \operatorname{div} F = 0$. Da $\operatorname{supp} F \subset U \subset M$ gilt

$$\int_M \operatorname{div} F = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} F(x) \; dx \,.$$

Es genügt also folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma. *Sei $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $1 \le j \le n$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) \; dx = 0 \,.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Dann ist die Aussage $\int_{\mathbb{R}} f'(x) \; dx = 0$ für jedes $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Mit dem HDI

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \; dx = \lim_{m \to \infty} \int_{-m}^{m} f'(x) \; dx = \lim_{m \to \infty} f(m) - f(-m) = 0 \,,$$

da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus, da das $\mathbb{R}^n$-Integral nicht von der Integrationsreihenfolge abhängt, i.e. man beginne die Integration mit x_j. $\square$

2. Fall $\partial M \cap U \neq \varnothing$. Wie zuvor sei $g : U \to \mathbb{R}$ mit $dg(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, $\partial M \cap U = \{g = 0\}$ und $M \cap U = \{g \le 0\}$. Wir schreiben die Koordinate x im Folgenden als $x = (x', x_n)$ mir $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Da $dg(p) \neq 0$, gilt $\partial_j g(p) \neq 0$ für ein $1 \le j \le n$. Nach Umnummerierung der Koordinaten, dürfen wir auch $\partial_n g(x) \neq 0$ annehmen. Der Satz über implizite Funktionen liefert uns nach einer etwaigen Verkleinerung [1]

[1] Strikt gesehen hätten wir diesen Schritt vorziehen müssen, i.e. bevor wir M mit den U_p's überdecken.

von U zu $U = U' \times I$ mit $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall die Darstellung

$$\partial M \cap U = \{(x', \psi(x')) \mid x' \in U'\}$$

für eine C^1-Funktion $\psi : U' \to I$. Das formulieren wir um zu

$$\partial M \cap U = \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = \psi(x')\}$$

Sei

$$\tilde{g} : U \to \mathbb{R}, \quad x = (x', x_n) \mapsto x_n - \psi(x')$$

und beachte $\partial_n \tilde{g}(x) = 1$, insbesondere $d\tilde{g}(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Wir wollen nun g durch $\tilde{g}$ ersetzen. Wir dürden auch U' als zusammenhängenden Würfel annehmem, was wir fortan auch tun. Mit $\tilde{U}^{\pm} = \{\pm\tilde{g} > 0\}$ erhalten wir offene Teilmengen $\tilde{U}^{\pm}$ und die lokale Separation

$$U = \tilde{U}^{+} \amalg (\partial M \cap U) \amalg \tilde{U}^{-} .$$

Andererseits erinnern wir an die Separation $U = U^{+} \amalg (\partial M \cap U) \amalg U^{-}$. Man beachte, daß $U^{\pm}$ und $\tilde{U}^{\pm}$ zusammenhängend sind, da die Separationen lokal diffeomorph zu einer linearen Hyperebenentrennung des $\mathbb{R}^n$ sind (lokale Plättung). Damit ist $U^{+} = (U^{+} \cap \tilde{U}^{+}) \amalg (U^{-} \cap \tilde{U}^{-})$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen. Da U^{+} zusammenhängend ist, gilt also $U^{+} = \tilde{U}^{+}$ oder $U^{+} = \tilde{U}^{-}$. O.E. dürfen wir annehmen $U^{+} = \tilde{U}^{+}$ und damit auch $U^{-} = \tilde{U}^{-}$. Damit dürfen wir fortan auch g durch $\tilde{g}$ ersetzen. Wir bestimmen nun das Flächenmaß sowie das Einheitsnormalenfeld für die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\partial M \cap U$. Zuerst ist $\partial M \cap U$ eine Haube, nämlich $\partial M \cap U = \mathscr{G}_{\psi}$ mit $\psi : U' \to \mathbb{R}^n$. Für Hauben genügt eine Karte, die Graphenkarte

$$\phi : U' \to \mathbb{R}^n, \quad x' \mapsto (x', \psi(x'))$$

mit $\phi(U') = \partial M \cap U$. Für jedes $f \in C_c(U)$ gilt dann

$$\int_{\partial M \cap U} f = \int_{U'} f(x', \psi(x')) \underbrace{g(x')\ dx'}_{=:dS(x')}$$

mit

$$g(x') = \sqrt{\det d\phi(x')^T d\phi(x')} .$$

Nun ist

$$d\phi(x') = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ d\psi(x') \end{pmatrix}$$

und somit

$$G(x') = d\phi(x')^T d\phi(x') = I_{n-1} + d\psi(x') d\psi(x')^T .$$

Lemma. *Sei $v \in \mathbb{R}^m$ und $A = I_m + vv^T \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. Dann:*

$$\det A = 1 + \|v\|^2 .$$

Beweis. Es existiert eine orthogonale Matrix $B \in \mathrm{O}(n)$ mit $Bv = c\mathbf{e}_1$ und $c = \|v\|$. Damit

$$\det A = \det BAB^T = \det(I_m + Bv(Bv)^T) = \det(I_m + c^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^T) = 1 + c^2 ,$$

da $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}^T = E_{11}$. □

Das Lemma angewandt auf $m = n-1$ und $v = d\psi(x')$ liefert uns nun

$$g(x') = \sqrt{1 + \|d\psi(x')\|^2}\,. \tag{g}$$

Damit haben wir eine konkrete Formel für das Integral über die Haube $\partial M \cap U$:

$$\int_{\partial M\cap U} f = \int_{U'} f(x', \psi(x'))\sqrt{1+\|d\psi(x')\|^2}\ dx' \qquad (f \in C_c(U))\,. \tag{1}$$

Im Gaußschen Integralsatz benötigen wir diese Formel für $f = \langle F, \nu\rangle$.
Da nun $g(x) = x_n - \psi(x')$, ergibt sich für das Einheitsnormalenfeld bei $p = (x', \psi(x')) \in \partial M \cap U$

$$\nu(p) = \frac{\operatorname{grad} g(p)}{\|\operatorname{grad} g(p)\|} = \frac{1}{g(x')}(-d\psi(x'), 1)^T\,. \tag{N}$$

Sei ν_j die j-te Komponente von ν. Definiere

$$RG_j := \int_{\partial M\cap U} F_j \nu_j$$

und beachte, daß die rechte Seite RG in (G) durch $RG = \sum_{j=1}^n RG_j$ gegeben ist. Mit unseren Formeln (g) und (N) erhalten wir:

$$RG_j = \begin{cases} -\int_{U'} F_j(x', \psi(x'))\partial_j\psi(x')\ dx' & \text{für } j < n \\ \int_{U'} F_n(x', \psi(x'))\ dx' & \text{für } j = n \end{cases}\,. \tag{RGj}$$

Es verbleibt die linke Seite LG in (G) zu berechnen. Wir setzen

$$LG_j := \int_{M\cap U} \partial_j F = \int_{M\cap U} \partial_j F(x)\ dx$$

und notieren $LG = \sum_{j=1}^n LG_j$. Mit $U = U' \times I$ und $I = (a,b)$ sowie $M \cap U = \{x_n - \psi(x') \le 0\}$ erhalten wir

$$LG_j = \int_{U'}\left(\int_a^{\psi(x')} \partial_j F_j(x', x_n)\ dx_n\right)\ dx'\,. \tag{LGj}$$

Der Nachweis des Gaußschen Integralsatzes ist nun Konsequenz des folgenden Lemmas.

Lemma. *$LG_j = RG_j$ für alle $1 \le j \le n$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $j = n$. Aus (LGj) und dem HDI für die Funktion $x_n \mapsto \frac{d}{dx_n}F(x', x_n)$ für festes x' folgt

$$LG_n = \int_{U'} F_n(x', \psi(x')) - F_n(x', a)\ dx'$$

und $F_n(x', a) = 0$ da $\operatorname{supp} F_n \subset U' \times (a,b)$. Somit $LG_n = RG_n$ nach (RGn) und wir dürfen uns fortan auf den Fall $j < n$ konzentrieren. Betrachte dazu die Funktion $H_j : U' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H_j(x') = \int_a^{\psi(x')} F_j(x', x_n)\ dx_n\,.$$

Hilfssatz. (Ableitung parameterabhängiger Integrale) *Seien C^1-Funktionen $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und $a \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist die Funktion*

$$H(x) := \int_a^{\psi(x)} F(x,t)\ dt$$

differenzierbar und für ihre Ableitung steht die Formel

$$H'(x) = \int_a^{\psi(x)} \partial_x F(x,t)\ dt + \psi'(x)F(x,\psi(x))\,.$$

Beweis. Wir betrachten

$$H(x+h) - H(x) = \int_a^{\psi(x+h)} F(x+h,t)\ dt - \int_a^{\psi(x)} F(x,t)\ dt$$

und fügen zur Entkopplung in altbekannterweise die Null ein

$$\begin{aligned} H(x+h) - H(x) &= \int_a^{\psi(x+h)} F(x+h,t)\ dt - \int_a^{\psi(x+h)} F(x,t)\ dt + \\ &\quad + \int_a^{\psi(x+h)} F(x,t)\ dt - \int_a^{\psi(x)} F(x,t)\ dt \\ &= \int_a^{\psi(x+h)} [F(x+h,t) - F(x,t)]\ dt + \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} F(x,t)\ dt\,. \end{aligned}$$

Nach dem MWS existiert ein $\xi \in [x, x+h]$ mit

$$F(x+h,t) - F(x,t) = h\partial_x F(\xi,t)\,.$$

Das $\xi = \xi(x,h,t)$ ist von x, h und t abhängig, hat jedoch die Eigenschaft $\lim_{h\to 0}\xi(x,h,t) = x$ uniform in t. Ebenso nach dem MWS existiert ein $\eta \in [x, x+h]$ mit $\psi(x+h) = \psi(x) + h\psi'(\eta)$ und $\lim_{h\to 0}\eta = x$. Packen wir es zusammen, so kommen wir bei

$$\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \int_a^{\psi(x+h)} \partial_x F(\xi,t)\ dt + \psi'(\eta)\cdot\frac{1}{\psi'(\eta)h}\int_{\psi(x)}^{\psi(x)+\psi'(\eta)h} F(x,t)\ dt$$

an. Mit dem MWS für Integrale (i.e. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt = f(\xi)$ für ein $\xi \in (a,b)$), wandeln wir den 2. Ausdruck um:

$$\psi'(\eta)\cdot\frac{1}{\psi'(\eta)h}\int_{\psi(x)}^{\psi(x)+\psi'(\eta)h} F(x,t)\ dt = \psi'(\eta)F(x,\nu)$$

für ein $\nu \in [\psi(x), \psi(x) + \psi'(\eta)h]$. Damit erhalten wir im Limes

$$H'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \int_a^{\psi(x)} \partial_x F(x,t)\ dt + \psi'(x)F(x,\psi(x))\,,$$

wobei ich einige letzte Details den ersten Term betreffend der Selbstnachprüfung überlasse. □

Kommen wir zurück zu unserer Funktion $H_j(x')$. Aus dem Hilfssatz leiten wir ab:

$$\partial_j H_j(x') = \int_a^{\psi(x')} \partial_j F_j(x', x_n)\ dx_n + \partial_j\psi(x')F_j(x',\psi(x'))\,. \tag{2}$$

Da $H_j \in C_c^1(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\operatorname{supp} H_j \subset U$, ist

$$\int_{U'} \partial_j H_j(x')\ dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j H_j(x')\ dx' = 0$$

nach dem Lemma in Fall 1. Integration von (2) über U' ergibt:

$$LG_j = \int_{U'}\left(\int_a^{\psi(x)} \partial_j F_j(x', x_n)\ dx_n\right)\ dx' = -\int_{U'} F_j(x',\psi(x'))\partial_j\psi(x')\ dx' = RG_j\,.$$

□

– $\mathscr{E}\mathscr{N}\mathscr{D}\mathscr{E}$ –