Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

3. Anleitung zum Selbststudium

(KW19)

Kurz zum Fahrplan: Mit diesem Arbeitsblatt schliessen wir das Thema Topologie und Stetigkeit [Fo2, §1 - §3] vorerst ab. In der nächsten Woche geht es weiter mit dem Studium von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Wiederholung: Metrische und topologische Räume, Stetigkeit

In diesem Abschnitt bezeichnet X stets eine Menge. Anhand der folgenden Liste von Fragen und kleinen Aufgaben können Sie Ihr Verständnis überprüfen.

1. Seien $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Machen Sie sich bitte klar, daß die Äquivalenz der Aussagen

   (a) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$

   (b) Die identische Abbildung
   $$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1), \quad x \mapsto x$$
   ist stetig

   eine Tautologie ist. Der Sachverhalt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ drückt sich sprachlich durch $\mathcal{T}_2$ *ist feiner als* $\mathcal{T}_1$ aus.

2. Die feinste Topologie auf einer Menge X existiert; es ist die diskrete Topologie $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$. Weiter ist die diskrete Topologie $\mathcal{T}_d$ metrisierbar, denn sie wird durch die diskrete Metrik
   $$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   implementiert. Nachprüfen!

3. Wann und nur wann ist die kofinite Topologie auf einer Menge X Hausdorffsch?

4. Wann nennt man einen metrischen Raum (X, d) vollständig? Ist (X, d) vollständig, so sind für eine Teilmenge $A \subset X$ folgende Aussagen gleichwertig:

   (a) A ist abgeschlossen, i.e. $A = \overline{A}$.

   (b) A ist vollständig, d.h. A, versehen mit der eingeschränkten Metrik $d|_{A \times A}$, ist ein vollständiger metrischer Raum.

   Hinweis: Ihre Vorlesungsmitschrift von Analysis 1.

5. Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heisst *vollständig*, insofern der zugehörige metrische Raum $(V, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist. Einen vollständigen normierten Raum nennt man zu Ehren von Stefan Banach einen *Banachraum* [1]

   Sei nun X eine Menge und

   $$B(X;\mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt}\}$$

   der Vektorraum (genauer, die $\mathbb{R}$-Algebra) der beschränkten Funktionen auf X. Dann, wie bereits in Analysis 1 gezeigt, ist $B(X;\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

   $$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|\,,$$

   vollständig, also ein Banachraum in unserem neuen Wortschatz. Ist im Zusatz X ein topologischer Raum, so bezeichnen wir mit $C_b(X;\mathbb{R}) \subset B(X;\mathbb{R})$ den Unterraum der (beschränkten) stetigen Funktionen. Zeigen Sie: $C_b(X;\mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $B(X;\mathbb{R})$, also auch ein Banachraum nach 4.

6. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Was war die Definition von f *ist stetig in* x_0? Wie charakterisieren sich stetige Abbildungen via einer griffigen Eigenschaft offener Mengen?

7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen nennt man *offen*, falls f offene Mengen auf offenen Mengen abbildet; in Symbolen: $O \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f(O) \in \mathcal{T}_Y$. Stetige Abbildungen sind in der Regel nicht offen: Beispiel $X = Y = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^{2n}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

8. Was war die Definition von einem *Homöomorphismus*? Geben Sie Homöomorphismen zwischen folgenden topologischen Räumen X und Y an:

   (a) $X = (0,1)$ und $Y = (-1,5)$.

   (b) $X = (0,1)$ und $Y = \mathbb{R}$.

   (c) $X = \mathbb{R}_{>0}$ und $Y = \mathbb{R}$.

9. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung. Das reine Abspulen der gelernten Begriffe führt schnell zur Ebenbürtigkeit von:

   (a) f ist offen.

   (b) f ist ein Homöomorphismus.

[1] Stefan Banach war ein bewundenswerter unkonventioneller Mensch, ein Autodidakt und Selberdenker. Einen Auszug aus dem Nachruf von Stan Ulam gebe ich hier wieder:

Banach worked in periods of great intensity separated by stretches of apparent inactivity. During the latter, however, his mind kept working on the selection of statements that would best serve as focal theorems in the next field of study. He liked constant mathematical discussion with friends and students. The writer remembers a mathematical session with Mazur and Banach lasting seventeen hours without interruption except for meals. In general both the Lwów and Warsaw mathematical schools were fond of and successful in collaboration. A large proportion of the papers published were written by more than one author. It was Banach and, in Warsaw, Sierpiński who were mainly responsible for this development. Much of the mathematical work was carried on in a way not usual in American mathematical centers. The mathematicians in Lwów met not only in their classrooms and offices but spent long hours every day in two coffee houses which served as informal meeting places. They discussed problems over coffee or beer, and marble table tops and napkins took the place of blackboards. It was hard to outlast or outdrink Banach during these sessions. He was always there. The weekly (Saturday night!) meetings of the mathematical society, where papers were presented, provided the more formal discussions.

Hier finden Sie eine verständliche und elementare Darlegung eines der seltsamsten Dinge in der Mathematik: das Banach-Tarski-Paradoxon.

10. Geben Sie ein Beispiel einer stetigen bijektiven Abbildung $f : X \to Y$, welche kein Homöomorphismus ist. Hinweis: Das schon mehrfach besprochene Aufrollen von $X = (0, 2\pi]$ zum Einheitskreis $Y = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ via $f(x) = e^{ix}$ tut es.

11. Was war die Definition von Kompaktheit? Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt, Urbilder sind es in der Regel nicht. Geben Sie ein Gegenbeispiel.

Kompaktheit - Teil 2: Der Satz von Heine-Borel

Hier geht es jetzt um den $\mathbb{R}^n$ und seine Topologie. Wie wir bereits gesehen haben, sind alle Höldernormen $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$, zueinander äquivalent. Diese Normen liefern dieselbe Topologie und das gleiche System beschränkter Mengen. Man spricht von der *Standardtopologie* oder auch *Euklidischen Topologie* des $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Vermöge $\mathcal{B}$ identifizieren wir V mit $\mathbb{R}^n$, i.e. durch den Isomorphismus*

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to V, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \,.$$

Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ definiert dann via der Bijektion $\Phi_{\mathcal{B}}$ eine Topologie auf V. Jene wiederum hängt nicht von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab (weshalb ?) und ebendiese Unabhängikeit erlaubt es uns, die Standardtopologie eines endlichdimensionalen Vektorraums zu definieren.

Wir erinnern nochmals an die Definition von Kompaktheit via der Überdeckungseigenschaft und erreichen den Kern dieses Kapitels:

Der Satz von Heine-Borel. *Für eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

1. *K is kompakt.*
2. *K ist beschränkt und abgeschlossen.*

Ein Beweis hierfür findet sich in [Fo3, §3]. Hilfreich zum Verständnis ist vielleicht auch dieses Video.
Mit dem Satz von Heine-Borel können wir nun den Beweis vom

Normenvergleichssatz. *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind alle Normen zueinander äquivalent.*

abschliessen. Von Blatt 2 wissen wir, daß wir V mit $\mathbb{R}^n$ gleichsetzen dürfen. Für eine feste Norm $\|\cdot\|$ auf $V = \mathbb{R}^n$ haben wir bereits

$$\|x\| \le C\|x\|_\infty \qquad (x \in V) \tag{1}$$

mit $C := \sum_{i=1} \|\mathbf{e}_i\| > 0$ nachgewiesen. Es verbleibt die Angabe einer zweiten Konstante $c > 0$ mit

$$c\|x\|_\infty \le \|x\| \quad (x \in V)\,. \tag{2}$$

Die Ungleichung (1) umformuliert besagt, daß der (lineare) Isomorphimsmus

$$\Phi := \mathrm{id}_V : (V, \|\cdot\|_\infty) \to (V, \|\cdot\|), \quad x \mapsto x$$

stetig ist. Nun ist der Rand der $\|\cdot\|_\infty$-Einheitskugel

$$K := \{x \in V \mid \|x\| = 1\}.$$

beschränkt und abgeschlossen in $(V, \|\cdot\|_\infty)$, also kompakt nach Heine-Borel. Da Φ stetig ist, ist $K = \Phi(K)$ ebenso kompakt in $(V, \|\cdot\|)$; zur Erinnerung: Stetige Abbildungen bilden Kompakta auf Kompakta ab. Offensichtlich ist auch die Abbildung

$$\phi : (V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \|x\|$$

stetig. Somit ist $Q := \phi(K) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen nach Heine-Borel. Da $0 \notin K$ ist auch $0 \notin \phi(K)$. Daher gibt es ein $c > 0$ mit

$$\|x\| \geq c \quad (x \in V,\ \|x\|_\infty = 1)\,. \tag{3}$$

Aus der Skalierungsinvarianz von Normen schliessen wir aus (3):

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \qquad (x \in V),$$

der zu erbringende Nachweis von (2). □

Der Normenvergleichsatz besagt insbesondere, daß Beschränktheit auf einem endlichdimensionalen Vektorraum ein universeller Begriff ist, i.e. nicht von der Wahl einer Norm abhängt.
Zum Abschluß noch eine kleine Verständnisfrage zur Kompaktheit:

Weshalb sind Gerade $\mathbb{R}$ und Kreis $\mathbb{S}^1$ nicht zueinander homöomorph?