

Analysis 2

4. Anleitung zum Selbststudium

(KW20)

Das durcharbeitende Material für diese Woche ist [Fo2, §4] und [Fo2, §5, p. 61 - 65].

Kurzabfrage zur Kompaktheit

1. Die Aussage

Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) ist kompakt

ist aus mehreren Gründen falsch. Benennen Sie zwei.

2. Beweisen Sie: Ist X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist A kompakt. *Hinweis:* Ist $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung, so ist $A^c \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von X .
3. Seien X, Y topologische Räume mit X kompakt sowie $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist f abgeschlossen, d.h. f bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Ist insbesondere f bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus. Beispiel: X ist die obere Hemisphäre

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1, x_3 \geq 0\},$$

Y sei die Einheitskreisscheibe

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\|_2 \leq 1\}$$

und $f : X \rightarrow Y$ die Einschränkung der Projektion

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

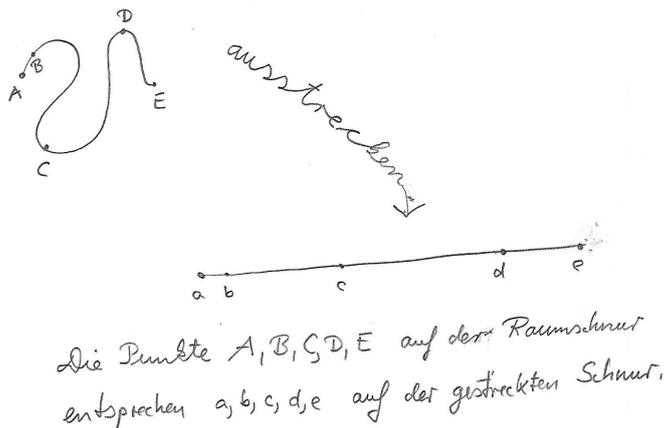
auf X . Nun ist f als Einschränkung einer stetigen Abbildung stetig. Zeichnen Sie sich ein Bild und illustrieren Sie die Bijektivität. Die (stetige) Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ können Sie auch konkret angeben. Bitte tun Sie das.

4. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.
5. Was bedeutet es für zwei Normen auf einem Vektorraum äquivalent zu sein? Was besagt der Normenvergleichssatz?

Kurven im \mathbb{R}^n

Hier gilt es [Fo2, §4] vollständig durchzuarbeiten. Ergänzend zu dem Buchtext gibt es noch ein paar Erläuterungen von mir.

In erster Näherung können wir uns eine Kurve als ein Stück Schnur, beliebig biegsam aber zunächst nicht dehnbar, im Raum vorstellen. Raum meint hier Zeichenebene \mathbb{R}^2 , Anschauungsraum \mathbb{R}^3 oder ganz allgemein \mathbb{R}^n . Ziehen wir die Schnur gerade, so erhalten wir ein lineares Stück, welches wir weiter zu einem Intervall abstrahieren.¹



Mehr formal richten wir unsere Aufmerksamkeit auf *Kurven*, welche als stetige Abbildungen der Form

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

definiert sind. Hier ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, der Parameterraum, und das Bild $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ ist das, was wir als "Schnur" oder "Kurve" im Raum wahrnehmen. Physikalisch und geometrisch interessiert uns eigentlich nur die Schnur $\gamma(I)$ selbst und nicht so sehr der Parameterraum I . Eine natürliche Frage in diesem Kontext ist: Gibt es einen Begriff von Länge und wie können wir diese gegebenenfalls berechnen?

Wir forderten, daß γ stetig ist. Das garantiert, da Intervalle zusammenhängend sind und stetige Abbildungen zusammenhängendes auf ebensolches werfen (Analysis 1), daß auch $\gamma(I)$ zusammenhängend ist.² Es gibt allerdings quadratausfüllende (engl. *filling the square*) stetige Abbildungen

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow {}^3[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

und es sollte Ihnen intuitiv klar sein, daß eine solche Raumschnur $\gamma(I) = [0, 1] \times [0, 1]$ keine endliche Länge haben kann.⁴

Der natürliche Zugang zur *Länge* ist die Approximation von $\gamma(I)$ durch einen Polygonzug. Von nun an sei $I = [a, b]$ kompakt. Für eine Zerlegung $Z = [t_1 = a < t_2 < \dots < t_n = b]$

¹Diese Prozedur bezeichnen wir später als *Parametrisierung einer Kurve nach der Bogenlänge*.

²Eine Teilmenge A eines topologischen Raums (X, \mathcal{T}_X) heißt *zusammenhängend*, falls sie nicht auseinandergerissen ist, i.e. im Falle $A \subset U \cup V$ mit $U, V \in \mathcal{T}_X$ gilt $A \subset U$ oder $A \subset V$.

³Die Doppelpfeil ist ein oft verwendetes Symbol für eine surjektive Abbildung.

⁴Es gibt eine Vielzahl von Konstruktionen raumfüllender Kurven, welche von Peano entdeckt und heute nach ihm bezeichnet werden. Mehr zu Peano-Kurven finden Sie hier: [Lexikon](#), [Beweis-skizze](#), [Video](#).

$\dots < t_n = b]$ ⁵ von I sei

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=1}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|_2$$

die (euklidische) Länge des Polygonzugs mit den Stützpunkten $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ (illustriert in [Fo2, Bild 4.6]).

Falls das Supremum

$$L(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma)$$

existiert (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$), so nennen wir γ *rektifizierbar* und definieren $L(\gamma)$ als die Länge von γ . Diese Definition stimmt mit der in [Fo2, §4] überein. Dazu muss man sich nur Folgendes überlegen: Ist Z_1 feiner als Z_2 , so gilt $L_{Z_2}(\gamma) \leq L_{Z_1}(\gamma)$, was wiederum eine Konsequenz aus der Dreiecksungleichung im \mathbb{R}^n ist.

Wir nennen eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ *differenzierbar*, falls dies für jede Komponente γ_i der Fall ist. Alternativ hätten wir Differenzierbarkeit einer Kurve auch durch die Existenz der vektorwertigen Limiten (im \mathbb{R}^n !)

$$\gamma'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \quad (t \in I)$$

erklären können. Überlegen Sie sich bitte, daß diese beiden Definitionen der Differenzierbarkeit einer Kurve in der Tat auf das Gleiche hinauslaufen und für eine differenzierbare Kurve

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$

gilt. Die geometrische Bedeutung von $\gamma'(t)$ als Tangentialvektor an dem Kurvenpunkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ ist in [Fo2, Bild 4.2] illustriert.

Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definieren wir eine C^k -Kurve im \mathbb{R}^n als eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_i \in C^k(I)$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Im Fall von $k = \infty$ spricht man auch von einer *glatten Kurve*.

Satz. Jede C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und ihre Länge ist durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \quad (1)$$

gegeben.

Beweis und Beispiele finden Sie in [Fo2, §4]; auch der Hilfssatz auf [Fo2, p. 56] – eine Form des vektorwertigen Mittelwertsatzes – ist hier von Interesse. Von den Beispielen verdient die Schraubenlinie [Fo2, (4.3) mit Bild 4.1] besondere Beachtung.

Bemerkung: Die von uns definierte Länge einer C^1 -Kurve stimmt nur mit der tatsächlichen Länge des der "Schnur" $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ überein, sofern $\gamma|_{I_0}$ injektiv ist.

⁵Formal ist eine Zerlegung von $I = [a, b]$ in $n - 1$ Teile ein Vektor $Z = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit strikt aufsteigenden Einträgen $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sowie $t_1 = a$ und $t_n = b$. Das habe ich in suggestiver Notation mit $Z = [t_1 = a < t_2 < \dots < t_n = b]$ abgekürzt. Die Menge der Knoten einer Zerlegung Z bezeichnen wir mit $|Z| = \{t_1, \dots, t_n\} \subset I$, und eine Zerlegung Z_1 nennt man feiner als Z_2 , insofern $|Z_2| \subset |Z_1|$ gilt.

Hier ist $I^0 = (a, b)$ das Innere von $I = [a, b]$. Betrachten wir die beiden geschlossenen Kurven

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix},$$

so haben diese das gleiche Bild, i.e. $\gamma_1(I) = \gamma_2(I)$ ist die Einheitskreislinie. Allerdings gilt

$$L(\gamma_1) = 2\pi \neq 4\pi = L(\gamma_2)$$

und diese Verdopplung spiegelt den zweifachen Umlauf des Kreises via γ_2 wider.

Sei nun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive rektifizierbare Kurve mit Länge $L(\gamma)$. Wir nennen γ nach der Bogenlänge parametrisiert, falls

$$L(\gamma|_{[a,t]}) = t - a \quad (t \in [a, b]).$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die Intervalle $[a, t]$ der Länge $t - a$ auf Kurvenstücke $\gamma([a, t])$ gleicher Länge abgebildet werden. Spezialisiert auf $t = b$ erhalten wir insbesondere

$$L(\gamma) = |I| = b - a.$$

Für ein injektive C^1 -Kurve γ überlegt man sich schnell, daß die Abbildung

$$\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)], \quad t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$$

ein Homöomorphismus ist: Zunächst erhält man aus (1) und dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, daß ϕ differenzierbar ist mit $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 \geq 0$. Demnach ist ϕ monoton steigend. Die Injektivität von γ impliziert die strikte Monotonie (wie?) und damit auch die Homöomorphie. Die umparametrisierte Kurve

$$\gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma \circ \phi^{-1}$$

ist nun nach der Bogenlänge parametrisiert (Übungsblatt 4). Mehr zu Reparametrisierungen finden Sie in [Fo2, p. 58 - 60].

Funktionen mehrerer Veränderlicher 1: Kurvenableitung

Im Wintersemester haben wir uns vornehmlich um Funktionen in einer Variablen mit Werten in \mathbb{R} gekümmert. Etwas genauer, zu einer beliebigen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$, genannt Definitionsbereich, betrachten wir Abbildungsvorschriften

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x).$$

Eine erste und vernünftige Verallgemeinerung wäre es nun, Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ zu

betrachten. Für einen Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir meist

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n),$$

weil die korrektere Vertikalnotation uns zu viel Platz beim Schreiben nehmen würde. Ich erinnere an den Graphen von Funktionen, welche dann hier Teilmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ wären :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in D, y = f(x)\} \subset D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Für $n = 2$ können wir uns $\mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}^3$ noch im Anschauungsraum vorstellen. Meditieren Sie bitte etwas zu der Grafik [Fo2, Bild 5.1], welche den Sachverhalt gut illustriert. Sei nun $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$. Typischerweise ist D eine offene Teilmenge oder der Abschluss einer solchen mit halbwegs vernünftigen Rand⁶.

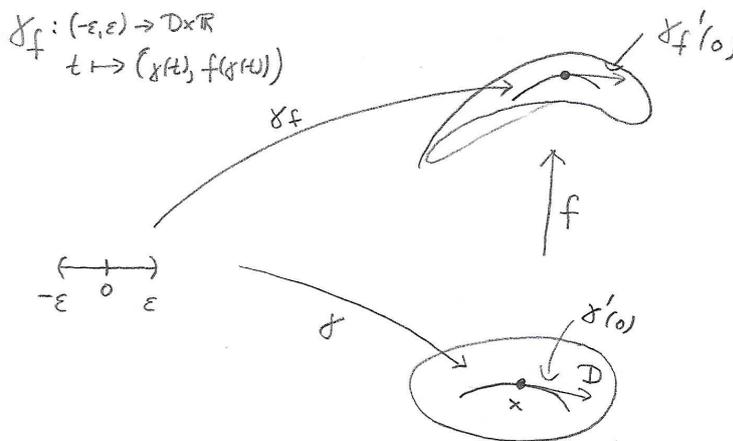
Wie können wir f in der Nähe eines fixierten Punktes $x \in D$ analysieren, wie können wir Differenzierbarkeit definieren? Folgendes ist intuitiv naheliegend: Wir fixieren einen Punkt $x \in D$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = x$. Damit wir auch jeden Punkt $x \in D$ von beliebiger Richtung mit einer auch in D liegenden Kurve ansteuern können⁸, müssen wir $D \subset \mathbb{R}^n$ als offen fordern. Sei also $D \subset \mathbb{R}^n$ von nun an offen. Von einer differenzierbaren Funktion würden wir sicherlich die Differenzierbarkeit entlang aller C^1 -Kurven in D verlangen wollen. Folglich nennen wir f *kurvendifferenzierbar*⁹ in $x \in D$, falls für jede differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = x$ das Kompositum

$$f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\gamma(t))$$

differenzierbar bei $t = 0$ ist. Wir setzen

$$\partial_\gamma(f)(x) = (f \circ \gamma)'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(x)}{h}$$

und nennen $\partial_\gamma(f)(x)$ die *Kurvenableitung von f entlang γ durch x* .



Nun stellen sich einige Fragen. Die erste ist wohl inwieweit $\partial_\gamma f(x)$ von der durch x dringenden Kurve γ abhängt. Genügt vielleicht nur die Kenntnis der Richtung $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ mit der γ durch x stösst? Um dem auf die Schliche zu kommen, führen

⁶Ist $D \subset \mathbb{R}^2$, so wäre "halbwegs vernünftig", wenn ∂D stückweise C^1 -berandet ist, d.h. $\partial D = \gamma(I)$ für eine stückweise C^1 -Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Salopp: Endlich viele Ecken am Rand sind erlaubt, aber ansonsten können wir überall am Rand eindeutig eine Tangente anlegen.

⁷ Wegen einer stets möglichen Umparametrisierung hätten wir natürlich stets $\epsilon = 1$ setzen dürfen, aber da ein " $\epsilon > 0$ " ja stets Kleinheit suggeriert, wollen wir damit zum Ausdruck bringen, daß es sich nur um einen kleinen Bogen $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset D$ handelt, der durch x dringt.

⁸ Wäre $D \subset \mathbb{R}^2$ ein ausgefülltes Dreieck und $x \in D$ eine Ecke, so wäre dies nicht möglich – für die Punkte im Inneren ist dies aber immer möglich.

⁹ Das ist kein üblicher Begriff, erscheint mir aber durchaus nützlich für den hier gewählten Zugang zur Differenzierbarkeit.

wir das Konzept der Richtungsableitung ein. Wir fixieren einen Punkt $x \in D$ und eine Richtung $v \in \mathbb{R}^n$. Da D offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $x + tv \in D$ für alle $|t| < \epsilon$, in anderen Worten die lineare Kurve

$$\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + tv$$

hat Bild enthalten in D . Wir setzen

$$\partial_v f(x) := \partial_{\gamma_v}(x),$$

bemerkten, daß $\partial_v f(x)$ nicht von der speziellen Wahl von $\epsilon > 0$ mit $\gamma_v(-\epsilon, \epsilon) \subset D$ abhängt, und definieren $\partial_v f(x)$ als die *Richtungsableitung von f in Richtung v an der Stelle x* .

Jetzt kann man sich weiter fragen: Muß man wirklich alle Richtungsableitungen $\partial_v f$ einzeln ausrechnen oder genügt es vielleicht nur "Hauptrichtungen" zu testen? Die Antwort gibt uns der folgende:

Satz. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von \mathbb{R}^n . Angenommen für jedes $1 \leq j \leq n$ und jedes $x \in D$ existieren die Richtungsableitungen $\partial_{v_j} f(x)$ und stellen darüber hinaus stetige Abbildungen $\partial_{v_j} f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dar. Dann ist f kurvendifferenzierbar und für jede Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = x$ gilt

$$\partial_\gamma f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_{v_j} f(x) c_j v_j, \quad (2)$$

wobei $\gamma'(0) = \sum_{j=1}^n c_j v_j$ die Koordinatendarstellung von $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ bezüglich der Basis \mathcal{B} ist. Aus (2) resultiert insbesondere:

1. $\partial_\gamma f(x)$ hängt nur von der Durchdringungsrichtung $\gamma'(0)$ ab.
2. Für festes $x \in D$ ist die Zuordnung $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \partial_v f(x) \in \mathbb{R}$ linear.

Dieser Satz beantwortet also unsere beiden primären Fragen. Den Beweis erbringen wir später in einem anderen formalen Kontext. Wir schliessen mit etwas üblicher Notation: Für die Standardbasis $\mathcal{B}_{\text{st}} = \{e_1, \dots, e_n\}$ des \mathbb{R}^n verkürzen wir die Schreibweise von ∂_{e_i} zu ∂_i . Andere, durchaus gängige Notationen für $\partial_i f$ sind

$$D_i f, \quad D_i(f), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_{x_i} f.$$

Lesen Sie nun [Fo2, §5, p. 61 - 65].