Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

8. Anleitung zum Selbststudium

(KW24)

Die Themen der Woche sind: Satz über die Umkehrfunktion, Satz über implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten. Quelle [S2, §3.1 - §3.3; genauer p. 52 - 68].

Wiederholung: Extremstellen

Folgende Aufgabe stammt aus dem Bayerischen Staatsexamen 2019 für Haupt- und Realschulen:

Betrachtet sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$. *Man bestimme alle lokalen Extrema von* f.

Das ist ein dankbarer Aufgabentypus, sowohl für Prüfling als auch Prüfer; für den Studenten deshalb, weil man hier ohne großes Nachdenken stur nach Schema vorgehen kann, und für den Dozenten, weil ... . Konkret: Ich erwarte von Ihnen, daß Sie solche Aufgaben binnen von 15 - 20 Minuten in einer Prüfung, ob schriftlich oder mündlich, fehlerfrei lösen können. Zum Kochrezept: Zuerst wird die Ableitung bestimmt:

$$df(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12)\,.$$

Dann setzt man diese zu Null und erhält mit etwas Rechengeschick die kritischen Punkte zu $\pm P$, $\pm Q$, wobei

$$P = (1, 2) \qquad Q = (2, 1)\,.$$

Als nächstes rechnet man die Hessesche aus

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

und sieht

$$\det \operatorname{Hess} f(x, y) = 36(x^2 - y^2)\,.$$

Dann erinnert man sich an folgendes Lemma aus der linearen Algebra:

Lemma. *Sei* $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ *eine symmetrische reelle Matrix. Dann gilt:*

1. *H is positiv definit* $\iff$ $a > 0$ *und* $\det H > 0$.
2. *H ist negativ definit* $\iff$ $a < 0$ *und* $\det H > 0$.

Nun ist $\det \operatorname{Hess} f(\pm P) < 0$ und $\det \operatorname{Hess} f(\pm Q) > 0$. Also hat f bei Q ein lokales Minimum and bei $-Q$ ein ein lokales Maximum. Am Rande: Die Extrema sind nicht global, da für festes y

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, y) = \pm\infty\,.$$

Die Anforderung in Bayern für das gymnasiale Lehramt sind etwas höher[1]; hier eine Aufgabe aus dem Bayerischen Staatsexamen für das gymnasiale Lehramt 2019:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy\,.$$

1. *Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.*
2. *Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und skizzieren Sie in $Q := (-1,2)\times(-1,2)$ die Menge $\{(x,y) \in Q \mid f(x,y) = 0\}$.*
3. *Sei T das abgeschlossene Dreieck im ersten Quadranten, das durch die Geraden $y = 0$, $x = 0$ und $x + y = 1$ berandet wird. Begründen Sie, daß die Funktion f eingeschränkt auf T ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte in T, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.*
4. *Skizzieren Sie num mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse qualitativ die Niveaulinien der Funktion f im Quadrant Q, so daß man den Typ der kritischen Punkte klar aus der Skizze ablesen kann.*

Das dürfen Sie nun selbst lösen; mehr als 45 Minuten sollten Sie aber nicht brauchen.

Der Umkehrsatz [S2, §3.1]

Qualitativ besagt der Umkehrsatz für stetige Funktionen, daß eine kleine Störung der identischen Abbildung homöomorph bleibt. Die formale Aussage war (Übungsblatt 5 oder [S2, §3.1]):

Stetiger Umkehrsatz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann ist*

$$f : U \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x - g(x)$$

ein Homöomorphismus auf das offene Bild $V := f(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Interessant ist der Spezialfall einer linearen Störung, also $g(x) = Ax$ für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ist $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, so hatten wir bereits in den Übungen gesehen, daß $(I - A)$ invertierbar war mit

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\,.$$

Kommen wir nun zum Umkehrsatz für differenzierbare Funktionen. Vorerst etwas neue Terminologie: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ eine Funktion. Dann nennt man f einen *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind. Ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so definiert man C^k-Diffeomorphismen entsprechend.

[1] Eine höhere akademische Ausbildung rechtfertigt erstens eine höhere Besoldung, i.e. A13 - A15 an Stelle von A12, und kommt zweitens der der anspruchsvollen schulischen Ausbildung durch die erhöhte Souveränität der Lehrkraft zugute. Alte und richtige Erkenntnisse, die in Bayern und Sachsen noch eine gewisse Gültigkeit haben, doch in unserer didaktifizierten Restrepublik verpönt sind. Wer Form vor Inhalt setzt, darf sich über mangelnde Kritik-und Analysefertigkeit der jungen Generation nicht beklagen. Doch genau jenes ist gewollt – denken Sie mal darüber nach! Zum Trost: Der Teufel springt derzeit im Dreieck und gleicht dem Rumpelstilzchen, bevor es sich selbst zerriß.

Hier möchte ich anmerken, daß aus der Differenzierbarkeit und Bijektivität von f noch nicht die Differenzierbarkeit von f^{-1} folgt, siehe

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^3\,.$$

Das Problem an diesem Beispiel ist der Nullpunkt mit $f'(0)=0$, was die Nichtdifferenzierbarkeit von f^{-1} bei 0 nach sich zieht. Ist das nicht der Fall, dann sind wir in einer besseren Situation:

Lemma. *Seien U,V offen und $f:U\to V$ eine differenzierbare Bijektion mit $df(x)\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar für alle $x\in U$. Dann ist $f^{-1}:V\to U$ differenzierbar und es gilt*

$$df^{-1}(f(x))=[df(x)]^{-1}\qquad (x\in U)\,. \tag{1}$$

Der Beweis des Lemmas ist Gegenstand unserer Übungen. Kommen wir nun zum

Satz über die Umkehrfunktion. *Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung sowie $x_0\in U$ ein Punkt, in dem $df(x_0)$ invertierbar ist. Dann existiert eine offene Umgebung $U_0\subset U$ von x_0, so daß $f|_{U_0}:U_0\to f(U_0)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.*

Bemerkung. *Man beachte die etwaige Verkleinerung von U zu U_0. Die ist auch zwingend notwendig. Beispiel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$ mit $x_0=1$. Eine maximale Wahl für U_0 wäre $U_0=(0,\infty)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Ableitung $df:U\to M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ x\mapsto df(x)$ stetig und $df(x_0)\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Da $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ offen ist (Übungsblatt 5), dürfen wir nach Verkleinerung von U annehmen, daß $df(x)$ für jedes x invertierbar ist. Ersetzen wir U durch $U-x_0$ und $f(x)$ durch $U-x_0\ni x\to f(x-x_0)$, so dürfen wir O.E. auch $x_0=0$ annehmen. Mit $A:=df(x_0)^{-1}$ und Übergang zur Funktion $x\mapsto A^{-1}f(x)$, ersehen wir mit der Kettenregel, daß auch die Annahme $df(0)=I$ gerechtfertigt ist. Nach Taylor gilt

$$f(x)=f(0)+df(0)x+R(x)=x+R(x)$$

mit einem Rest $R(x)$, der $\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{\|x\|}=0$ genügt. Wegen $R(x)=x-f(x)$, ist R von der Klasse C^1 und aus $R(0)=0$ samt obiger Restgliedabschätzung folgt $dR(0)=0$. Damit gibt es ein $\epsilon>0$ mit $\|dR(x)\|_{\mathrm{op}}<\frac{1}{2}$ für all $x\in U_0:=B_\epsilon(0)$. Der Schrankensatz liefert weiter

$$\|R(x)-R(y)\|\leq\frac{1}{2}\|x-y\|\qquad (x,y\in U_0)\,.$$

Somit ist $f|_{U_0}$ eine Lipschitzstörung der Identität mit $g=-R$ und Lipschitzkonstante $L=\frac{1}{2}<1$. Nach dem Umkehrsatz ist $f|_{U_0}:U_0\to f(U_0)$ ein C^1-Homöomorphismus auf das offene Bild $V_0=f(U_0)$. Es verbleibt der Nachweis, daß$(f|_{U_0})^{-1}$ ebenfalls C^1 ist. Dies folgt aus (1) und der Homöomorphie der Inversion $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ X\mapsto X^{-1}$ (siehe Übungsblatt 5) . □

Der Satz über implizite Funktionen [S2, §3.2]

Wir beginnen mit ein paar einführenden Beispielen in niedriger Dimension. Gegeben sei eine C^1- Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto f(x,y)$$

und (x_0, y_0) ein Punkt mit $f(x_0, y_0) = 0$. Beispiele seien

$$f_1(x,y) = x - y^2 \qquad f_2(x,y) = e^y + \sin(x + y^{17}) - 1$$

mit $(x_0, y_0) = (1,1)$ im ersten Fall und $(x_0, y_0) = (0,0)$ für $f = f_2$. Sodann betrachten wir die Niveaumengen

$$\mathcal{N}_i := f_i^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x,y) = 0\} \qquad (i = 1,2)$$

und beachten $(x_0, y_0) \in \mathcal{N}_i$. Unsere naive Vorstellung ist dann, daß $\mathcal{N}_i$ ein eindimensionales Objekt in $\mathbb{R}^2$ seien sollte, da durch die Kopplung der Variablen x und y durch $f_i(x,y) = 0$ ein Freiheitsgrad genommen wird. Betrachten wir zuerst den Fall $f_1(x,y) = x - y^2$. Nun bedeutet $f_1(x,y) = 0$ eben $x = y^2$ und wir können, so lange x positiv ist, y nach x auflösen via $y = \sqrt{x}$. Formal:

$$\mathcal{N}_1 \cap (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}) = \{(x, \psi(x)) \mid x > 0\}$$

und $\psi(x) = \sqrt{x}$. Im zweiten Fall bedeutet $f_2(x,y) = e^y + \sin(x + y^{17}) - 1 = 0$ nichts anderes als $e^y = 1 - \sin(x + y^{17})$ und für x, y nahe bei $(x_0, y_0) = (0,0)$ ist $|\sin(xy + y^{17})| < 1$, so daß wir das in $y = \ln(1 - \sin(xy + y^{17}))$ umschreiben könnten. Aber auf der rechten Seite steht aber immer noch ein verflixtes y und Sie können sich anstrengen wie Sie wollen, werden es aber nicht schaffen, das y nach x explizit aufzulösen, i.e. das Auffinden einer offenen Umgebung $W_0 = U_0 \times V_0$ von (x_0, y_0) und einer expliziten Funktion $\psi : U_0 \to V_0$ mit

$$\mathcal{N}_2 \cap W_0 = \{(x, \psi(x)) \mid x \in U_0\}$$

ist unmöglich. Nichtsdestotrotz kann man sich fragen, ob so eine lokal auflösende Funktion ψ existiert. Das ist ähnlich zu unseren Umkehrsätzen aus dem letzten Kapitel: Hier konnten wir die jeweiligen Umkehrfunktionen in der Regel nicht explizit angeben, sondern erhielten diese als Limiten aus einem iterativen Prozeß über den Banachschen Fixpunktsatz.

Ist denn nun eine lokale Auflösung der Gleichung $f(x,y) = 0$ in der Nähe einer festen Nullstelle (x_0, y_0) stets möglich? Nicht immer und wir betrachten dazu wieder $f_1(x,y) = x - y^2$, nun aber mit $(x_0, y_0) = (0,0)$ an Stelle von $(x_0, y_0) = (1,1)$. Da für negatives x stets $f_1(x,y) < 0$, ist eine Auflösung von y nach x (im Reellen) für $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ nicht möglich. Die Problematik stammt vom Verschwinden der ersten partiellen Ableitung nach y, genauer $\partial_y f_1(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$. Ist das aber nicht der Fall, so sehen wir uns in einer in der Tat auflösbaren Situation wieder. Die Heuristik kommt wieder mal von Taylor

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + R(x,y) \\ &= f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + R(x,y)\,. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wird die Lipschitzstörung R, so können wir in $f(x,y) = 0$ wegen $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ die Variable y nach x auflösen.

Satz über implizite Funktionen - ebene Form. *Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ offen und $z_0 = (x_0, y_0) \in W$. Sei weiter $f : W \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung mit $f(z_0) = 0$ und $\partial_y f(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebungen $U_0 \times V_0 \subset W$ von z_0 sowie eine C^1-Funktion $\psi : U_0 \to V_0$ mit*

$$f^{-1}(\{z_0\}) \cap (U_0 \times V_0) = \{(x, \psi(x)) \mid x \in U_0\}\,.$$

Für die Ableitung der Auflösungsfunktion gilt

$$\psi'(x) = -[f_y(x, \psi(x))]^{-1} f_x(x, \psi(x)) \qquad (x \in U_0)\,.$$

Beispiel. Für f_2 von oben gilt $\partial_y f_2(0,0) = 1 \neq 0$ und demnach ist $f_2(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0) = (0,0)$ mit x als freier Variable auflösbar.

Beweis. Der Satz reduziert sich schnell auf den Satz über die Umkehrfunktion. Wir gehen wie folgt vor und betrachten die C^1-Abbildung

$$F : W \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$$

und berechnen deren Ableitung zu

$$dF(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x(z_0) & f_y(z_0) \end{pmatrix}$$

und beachten $\det dF(z_0) = f_y(z_0) \neq 0$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert eine offene Umgebung W_0 von z_0, so daß $F|_{W_0} : W_0 \to F(W_0) =: W_1$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. Nach Verkleinern von W_0 dürfen wir $W_0 = U_0 \times V_0$ in Produktform annehmen. Sei $G : W_1 \to W_0$ die Umkehrfunktion. Schreibe $G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)$ und beachte

$$(x,y) = F(G(x,y)) = F(g_1(x,y), g_2(x,y)) = (g_1(x,y), f(g_1(x,y), g_2(x,y))\,.$$

Also hat G die vereinfachte Form $G(x,y) = (x, g(x,y))$ und $U_0 \times \{0\} \subset W_1$. Mit

$$\psi : U_0 \to V_0, \quad x \mapsto g(x,0)$$

erhält man nun die gewünschte C^1-Auflösung, denn

$$F(x,\psi(x)) = (x, f(x,\psi(x)) = (x, f(x, g(x,0))) = F(G(x,0)) = (x,0)\,.$$

Schliesslich berechnen wir das das Differential von ψ. Dazu beachten wir, daß die Zuordnung $\phi(x) := f(x,\psi(x))$ konstant Null ist. Ergo $\phi'(x) = 0$, was sich via der Kettenregel wie folgt ausnimmt

$$0 = df(x,\psi(x))(1,\psi'(x)) = f_x(x,\psi(x)) + f_y(x,\psi(x))\psi'(x)\,.$$

Damit folgt $\psi'(x) = -f_y(x,\psi(x))^{-1} f_x(x,\psi(x))$. □.

Der allgemeine Fall des Satzes über implizite Funktion ist samt Beweis in enger Anlehnung zum just besprochenen ebenen Fall. Wir betrachten eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, fixieren einen Punkt $z_0 = (x_0,y_0) \in W$ und richten unser Augenmerk auf eine C^1-Abbildung

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} : W \to \mathbb{R}^k, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$$

mit $f(z_0) = 0$ und

$$d_{\mathbf{y}} f(z_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(z_0) \right)_{1 \le i,j \le k}$$

invertierbar. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine offene Umgebung $U_0 \times V_0$ von z_0 und eine C^1-Abbildung $\psi : U_0 \to V_0$ mit

$$f^{-1}(\{z_0\}) \cap (U_0 \times V_0) = \{(x,\psi(x)) \mid x \in U_0\}\,.$$

Weiter gilt

$$d\psi(x) = -[d_{\mathbf{y}} f(x,\psi(x))]^{-1} \circ d_{\mathbf{x}} f(x,\psi(x))$$

mit

$$d_{\mathbf{x}} f(z) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_0) \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n}}\,.$$

Der Beweis ist analog zum ebenen Fall wie Sie schnell aus [S2] entnehmen.

Untermannigfaltigkeiten I: [S2, §3.3]

Unter einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit oder Fläche im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir intuitiv eine Teilmenge, die sich (lokal) mit k freien Parametern beschreiben lässt. Nehmen wir zum Beispiel die Kugelschale (Sphäre)

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}\,.$$

Diese ist Niveaufläche $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(\{0\})$ der glatten quadratischen Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, x\rangle - 1\,.$$

Mit $f(x) = 0$ verlieren wir einen Freiheitsgrad und es mehr als naheliegend, die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ als $(n-1)$-dimensionales Objekt zu erwarten. Betrachten wir die Situation um den Nordpol $p = \mathbf{e}_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ und sei $U_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ der p umgebende obere Halbraum. Die Abbildung

$$F : U_+ \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x))$$

hat die Eigenschaften:

- F ist ein Diffeomorphismus (weshalb?) auf ihr offenes Bild $F(U_+)$.
- $F(U_+ \cap \mathbb{S}^{n-1}) = D^{n-1} \times \{0\}$ mit $D^{n-1} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x'\|_2 < 1\}$.

In anderen Worten, F plättet die obere Hemispähare auf die $(n-1)$-dimensionale Scheibe D^{n-1}. Dies führt uns nun zu dem Begriff der Plättung und der formalen Definition einer Untermannigfaltigkeit in [S2, Def. 3.3.2].

Definition. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine (in $\mathbb{R}^n$) offene Umgebung U von p existiert samt einem C^1-Diffeomorphismus $F : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})\,.$$

Man nennt F eine lokale Plättung von M bei p.

Aufgabe. *Folgende Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ sind $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten:*

1. *Das Ellipsoid $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 = 1\}$ für feste Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$.*
2. *Das Paraboloid $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\}$.*

Eine effiziente Methode, um Untermannigfaltigkeiten zu bestimmen ist der Satz vom regulären Wert. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^k$. Dann nennt man $c \in \mathbb{R}^k$ einen *regulären Wert* falls $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ surjektiv ist für alle $x \in f^{-1}(\{c\})$. Man beachte: Liegt c nicht im Bild, i.e. $c \notin f(U)$, so ist c ein regulärer Wert, da $f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$.

Satz vom regulärem Wert. *Sei $W \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$. Dann ist für jeden regulären Wert $c \in f(W)$ die Faser $f^{-1}(\{c\})$ eine $m-k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$.*

Beispiel. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, x\rangle$. Dann ist $y = 1$ ein regulärer Wert, da $df(x) = 2x^T \neq 0$ für jedes $x \in f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{S}^{n-1}$. Ergo: Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Nach Übergang von f zu $f-c$ dürfen wir $c=0$ annehmen. Sei $p \in M := f^{-1}(\{0\})$. Nach Voraussetzung hat die Matrix $A := df(p)$ vollen Rang, d.h. es gibt k linear unabhängige Spalten. Nach etwaiger Umsortierung der Koordinaten in $\mathbb{R}^m$ dürfen wir annehmen, daß die letzten k Spalten von A linear unabhängig sind. Durch $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ und $n := m-k$ und entsprechende Aufteilung von $z \in \mathbb{R}^m$ zu $z=(x,y)$ dürfen wir demnach $d_{\mathbf{y}} f(p) \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ als invertierbar annehmen. Nun greift der Satz über implizite Funktionen und liefert eine Umgebung $U_0 \times V_0$ von $p=(x_0,y_0)$ mit

$$M \cap (U_0 \times V_0) = \{(x,\psi(x)) : x \in U_0\})$$

und eine C^1-Abbildung $\psi : U_0 \to V_0$. Mit $W_0 := U_0 \times V_0$ erhalten wir dann eine offene Umgebung und durch

$$F : W_0 \to \mathbb{R}^m, \quad (x,y) \mapsto (x, y-\psi(x))$$

ist eine lokale Plättung bei p gegeben. □

Aufgabe. *Seien $v \in \mathbb{R}^3$ und $\delta \in \mathbb{R}$ fest. Betrachtet sei*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1,x_2,x_3)^T \mapsto (x_3^2 - x_2^2 - x_1^2, \langle x,v\rangle - \delta)^T .$$

Dann nennt man $M := f^{-1}(\{0\})$ einen Kegelschnitt, da M der Schnitt des Doppelkegels $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\}$ mit der Ebene $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x,v\rangle = \delta\}$ ist. Man zeige: sind $v,\delta \neq 0$, so ist M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Welche Kurven aus der Schulgeometrie erhalten Sie? Was geschieht im degenerierten Fall $\delta = 0$?