Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^k-Abbildung und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $\mu \in \mathbb{N}_0^k$ mit $|\mu| \leq k$ gilt

$$\operatorname{supp}(\partial^\mu f) \subseteq \operatorname{supp}(f).$$

(b) Für jede Polynomfunktion f gilt

$$\operatorname{supp}(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & (f \neq 0) \\ \emptyset, & (f = 0). \end{cases}$$

(c) $\operatorname{supp}(fg) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$.

(d) $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$.

Präsenzaufgabe 10.2 Berechnen Sie

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} (x_1 + x_2)^{-3}\, dx.$$

Präsenzaufgabe 10.3 Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_B x_1^2 x_2^2\, dx.$$

Präsenzaufgabe 10.4 Berechnen Sie das Volumen von dem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^3$, dass zwischen den Paraboloiden

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 - x_3 = 4\}$$

und

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 + x_3 = 4\}$$

liegt.

Präsenzaufgabe 10.5 Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ und

$$\Phi : B \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} x$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to B, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} x$$

die Umkehrabbildung von Φ ist.

(b) Folgern Sie, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(c) Beweisen Sie, dass

$$D\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\Big(I_n + \Phi(x)\Phi(x)^t\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(d) Zeigen Sie

$$\det D\Phi(x) = \frac{1}{\big(1-\|x\|^2\big)^{\frac{n}{2}+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(e) Beweisen Sie, dass für alle $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = \int_B \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}x\right)\frac{1}{\big(1-\|x\|^2\big)^{\frac{n}{2}+1}}\,dx.$$

Hausaufgabe 10.1 Wir definieren für $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

von ϕ als

$$\mathcal{F}\phi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Beweisen Sie, dass für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\mu \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathcal{F}\big(\partial^\mu \phi\big)(\xi) = (i\xi)^\mu\, \mathcal{F}\phi(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

wobei

$$(y)^\mu := y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \qquad (y \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$$\mathcal{F}\big(A^*\phi\big) = \frac{1}{\det(A)}\big((A^{-1})^t\big)^* \mathcal{F}(\phi),$$

wobei * das Zurückziehen bezeichnet.

(c) Seien $\phi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $\phi * \psi$ von ϕ und ψ durch

$$\phi * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Beweisen Sie die Identität

$$\mathcal{F}(\phi * \psi) = \mathcal{F}\phi\, \mathcal{F}\psi.$$

Hausaufgabe 10.2

(a) Beweisen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}\, dx = \pi.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt\right)^n.$$

Folgern Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Hausaufgabe 10.3 Sei $U = (0,1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\int_U e^{x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2} \sqrt{1 - x_1^2}\, dx$$

Hinweis: Betrachten Sie erst die Abbildung $\Phi : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(x_1, x_2\sqrt{1-x_1^2}\big)$ und verwenden Sie dann Polarkoordinaten.

Hausaufgabe 10.4 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige kompakt getragene Funktion, sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1.$$

Wir definieren für $\epsilon > 0$ die Funktion $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f\big(\frac{1}{\epsilon}x\big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) = \epsilon \operatorname{supp}(f) := \{\epsilon x : x \in \operatorname{supp}(f)\}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\,dx = 1.$$

(b) Beweisen Sie, dass für alle stetige Funktionen $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx = \phi(0).$$