Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^k-Abbildung und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $\mu \in \mathbb{N}_0^k$ mit $|\mu| \leq k$ gilt

$$\operatorname{supp}(\partial^\mu f) \subseteq \operatorname{supp}(f).$$

(b) Für jede Polynomfunktion f gilt

$$\operatorname{supp}(f) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & (f \neq 0) \\ \emptyset, & (f = 0). \end{cases}$$

(c) $\operatorname{supp}(fg) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)$.

(d) $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$.

Lösung: Es gilt

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} = \Big(\big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ\Big)^c.$$

(a) Wenn $y \in \big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ$, dann gibt es eine offene Umgebung U von y in $\mathbb{R}^n$, sodass $f\big|_U = 0$. Es folgt, dass alle Ableitungen von f in y gleich 0 sind. Insbesondere gilt für alle $\mu \in \mathbb{N}_0^n$

$$y \in \Big((\partial^\mu f)^{-1}(\{0\})\Big)^\circ.$$

Dies beweisst, dass $\big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ \subseteq \Big((\partial^\mu f)^{-1}(\{0\})\Big)^\circ$ und damit

$$\operatorname{supp}(\partial^\mu f) = \bigg(\Big((\partial^\mu f)^{-1}(\{0\})\Big)^\circ\bigg)^c \subseteq \Big(\big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ\Big)^c = \operatorname{supp}(f).$$

(b) Wenn f eine Polynomfunktion ist, dann ist f eindeutig bestimmt durch die Ableitungen $\partial^\mu f(x)$ mit $\mu \in \mathbb{N}_0^n$ für ein festes Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ \neq \emptyset$ und $x \in \big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ$, dann gilt $\partial^\mu f(x) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}_0^n$. Es folgt, dass $f = 0$ und $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(0) = \emptyset$. Wenn $\big(f^{-1}(\{0\})\big)^\circ = \emptyset$, dann gibt es ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) \neq 0$. Es folgt, dass $f \neq 0$ und $\operatorname{supp}(f) = \mathbb{R}^n$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(fg) &= \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0\}} \\ &= \overline{f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\})} \\ &\subseteq \overline{f^{-1}(\{0\})} \cap \overline{g^{-1}(\{0\})} \\ &= \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g).\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(f+g) &\subseteq \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0 \text{ oder } g(x)\neq 0\}}\\ &= \overline{f^{-1}(\{0\})\cup g^{-1}(\{0\})}\\ &= \overline{f^{-1}(\{0\})}\cup\overline{g^{-1}(\{0\})}\\ &= \operatorname{supp}(f)\cup\operatorname{supp}(g).\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 10.2 Berechnen Sie

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} (x_1+x_2)^{-3}\,dx.$$

Lösung: Es gilt

$$\int_{[0,1]\times[1,2]} (x_1+x_2)^{-3}\,dx = \int_0^1\int_1^2 (x_1+x_2)^{-3}\,dx_2\,dx_1$$

Das innere Integral ist gleich

$$\int_1^2 (x_1+x_2)^{-3}\,dx_2 = -\frac{1}{2}(x_1+x_2)^{-2}\Big|_{x_2=1}^2 = \frac{1}{2}(x_1+1)^{-2} - \frac{1}{2}(x_1+2)^{-2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[1,2]} (x_1+x_2)^{-3}\,dx &= \int_0^1 \big(\frac{1}{2}(x_1+1)^{-2} - \frac{1}{2}(x_1+2)^{-2}\big)\,dx_1\\ &= \Big(-\frac{1}{2}(x_1+1)^{-1} + \frac{1}{2}(x_1+2)^{-1}\Big)\Big|_{x_1=0}^1\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 10.3 Sei $B=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|<1\}$. Berechnen Sie

$$\int_B x_1^2x_2^2\,dx.$$

Lösung: Sei

$$\Phi : (0,1)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2, \quad (r,\phi)\mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\\ r\sin(\phi)\end{pmatrix}.$$

Φ ist ein C^1-Diffeomorphismus auf $V := B\setminus\big([0,1)\times\{0\}\big)$. Es gilt

$$\det D\Phi(r,\phi) = r \qquad \big(r\in(0,1), \phi\in(0,2\pi)\big).$$

Da die Integrale über B und über V gleich sind, folgt

$$\begin{aligned}\int_B x_1^2x_2^2\,dx &= \int_V x_1^2x_2^2\,dx\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^5\cos^2(\phi)\sin^2(\phi)\,d\phi\,dr\\ &= \int_0^1 r^5\,dr\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{8}\cos(4\phi)+\frac{1}{8}\Big)\,d\phi\\ &= \frac{1}{6}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 10.4 Berechnen Sie das Volumen von dem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^3$, dass zwischen den Paraboloiden

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 - x_3 = 4\}$$

und

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 + x_3 = 4\}$$

liegt.

Lösung: Wir schreiben M für das Gebiet zwischen den beide Paraboloiden. M wird von unten beschränkt durch $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 - x_3 = 4\}$ und von oben durch $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 + x_3 = 4\}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann erhalten in M, wenn

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 < x_3 < -(x_1^2 + x_2^2) + 4.$$

Die Ungleichung $x_1^2 + x_2^2 - 4 < -(x_1^2 + x_2^2) + 4$ ist äquivalent zu $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_M dx &= \int_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2+x_2^2}<2\}} \int_{x_3 = x_1^2+x_2^2-4}^{-(x_1^2+x_2^2)+4} dx_3\, d(x_1, x_2) \\ &= \int_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2+x_2^2}<2\}} \big(-2(x_1^2 + x_2^2) + 8\big)\, d(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Jetzt introduzieren wir Polarkoordinaten und bekommen

$$\int_M dx = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\big(-2r^2 + 8\big)\, d\phi\, dr = 16\pi.$$

Präsenzaufgabe 10.5 Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ und

$$\Phi : B \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} x$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to B, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} x$$

die Umkehrabbildung von Φ ist.

(b) Folgern Sie, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(c) Beweisen Sie, dass

$$D\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \Big(I_n + \Phi(x)\Phi(x)^t \Big) \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1}$$

(d) Zeigen Sie

$$\det D\Phi(x) = \frac{1}{\big(1 - \|x\|^2\big)^{\frac{n}{2}+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(e) Beweisen Sie, dass für alle $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = \int_B \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} x \right) \frac{1}{\big(1 - \|x\|^2\big)^{\frac{n}{2}+1}}\, dx.$$

Lösung:

(a) Für alle $x \in B$ gilt

$$\begin{aligned}
\Psi\big(\Phi(x)\big) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left\|\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}x\right\|^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\big(1-\|x\|^2\big)\Big(1+\frac{1}{1-\|x\|^2}\|x\|^2\Big)}}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2+\|x\|^2}}x \\
&= x
\end{aligned}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\Phi\big(\Psi(x)\big) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left\|\frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}x\right\|^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\big(1+\|x\|^2\big)\Big(1-\frac{1}{1+\|x\|^2}\|x\|^2\Big)}}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2-\|x\|^2}}x \\
&= x.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass Φ bijektiv ist und $\Phi^{-1} = \Psi$.

(b) Die Abbildungen Φ und Ψ sind beide stetig differenzierbar. Da $\Phi^{-1} = \Psi$, ist Φ ein C^1-Diffeomorphismus.

(c) Sei $x \in B$ und seien $1 \le i, j \le n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_j(x) &= \begin{cases} \frac{x_i^2}{\big(1-\|x\|^2\big)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, & (i = j) \\ \frac{x_i x_j}{\big(1-\|x\|^2\big)^{\frac{3}{2}}}, & (i \ne j). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big(\Phi_i(x)^2+1\big), & (i = j) \\ \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\Phi_i(x)\Phi_j(x), & (i \ne j). \end{cases}
\end{aligned}$$

Gleichung (1) folgt aus dieser Berechnung.

(d) Sei $x \in B$. Dann gilt

$$D\Phi(x)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big(I_n+\Phi(x)\Phi(x)^t\big)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big(1+\|\Phi(x)\|^2\big)\Phi(x).$$

Es folgt, dass $\Phi(x)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big(1+\|\Phi(x)\|^2\big)$ ist.
Für jeder $v \in \Phi(x)^\perp$ gilt

$$D\Phi(x)v = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\big(I_n+\Phi(x)\Phi(x)^t\big)v = \frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}v.$$

Es folgt, dass v einen Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$ ist. Sei $\{v_2, \dots v_n\}$ eine Basis von $\Phi(x)^\perp$. Dann ist $\{\Phi(x), v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren von $\mathbb{R}^n$. Es folgt

$$\begin{aligned}\det D\Phi(x) &= \frac{1}{(1-\|x\|^2)^{\frac{n}{2}}}\big(1+\|\Phi(x)\|^2\big)\\ &= \frac{1}{(1-\|x\|^2)^{\frac{n}{2}}}\big(1+\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}\big)\\ &= \frac{1}{(1-\|x\|^2)^{\frac{n}{2}+1}}.\end{aligned}$$

(e) Die Identität folgt aus der Transformationsformel.