Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

12. Übungsblatt

Hausaufgabe 12.1 Sei $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Beweisen Sie die Identität

$$n \operatorname{vol}_n\big(B^n(r)\big) = r \operatorname{vol}_{n-1}\big(S^{n-1}(r)\big).$$

Betrachten Sie dazu das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x$$

und verwenden Sie den Integralsatz von Gauß.

Lösung: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\operatorname{div} f(x) = n$. Wir verwenden den Integralsatz von Gauß und bekommen

$$\begin{aligned}
n \operatorname{vol}_n\big(B^n(r)\big) &= \int_{B^n(r)} \operatorname{div} f(x)\, dx \\
&= \int_{S^n(r)} \langle f(y), \frac{1}{\|y\|} y\rangle\, dy \\
&= \int_{S^n(r)} \|y\|\, dy \\
&= r \operatorname{vol}_{n-1}\big(S^{n-1}(r)\big).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12.2 Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x) = \big(x_1 x_2^2, x_1^2 x_2, x_3^3\big) \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

(a) Berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld ν von M.

(b) Wir schreiben dy für das Flächenmaß auf M. Berechnen Sie

$$\int_{\partial M} \big\langle f(y), \nu(y)\big\rangle\, dy$$

einmal direkt und einmal mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Lösung:

(a) Der Rand ∂M von M ist gleich

$$\partial M = \overline{N_1} \cup N_2 \cup N_3,$$

wobei

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, -1 < x_3 < 1\} \\
N_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = -1\} \\
N_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 1\}.
\end{aligned}$$

Sie $\nu : N_1 \cup N_2 \cup N_3 \to \mathbb{R}^3$ dass äußere Einheitsnormalenfeld von M. Es gilt

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= (x_1, x_2, 0)^t \qquad (x \in N_1) \\
\nu(x) &= (0, 0, -1)^t \qquad (x \in N_2) \\
\nu(x) &= (0, 0, 1)^t \qquad (x \in N_3).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial M} \big\langle f(y), \nu(y) \big\rangle \, dy \\
&= \int_{N_1} 2x_1^2 x_2^2 \, dx + \int_{N_2} -x_3^3 \, dx + \int_{N_3} x_3^3 \, dx \\
&= \int_{x_3=-1}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2\cos^2(\phi)\sin^2(\phi) \, d\phi \, dx_3 + 2 \int_{(x_1,x_2)\in B^2(1)} 1 \, d(x_1,x_2) \\
&= 2 \int_{x_3=-1}^{1} dx_3 \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2(\phi)\sin^2(\phi) \, d\phi + 2\pi \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \big\langle f(y), \nu(y) \big\rangle \, dy &= \int_M \operatorname{div} f(x) \, dx \\
&= \int_M x_2^2 + x_1^2 + 3x_3^2 \, dx \\
&= \int_{(x_1,x_2)\in B^2(1)} \int_{x_3=-1}^{1} x_2^2 + x_1^2 + 3x_3^2 \, dx_3 \, d(x_1,x_2) \\
&= \int_{(x_1,x_2)\in B^2(1)} 2(x_1^2 + x_2^2) + 2 \, d(x_1,x_2) \\
&= \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r^3 + 2r \, d\phi \, dr \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 12.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \| \cdot \|^{2-n}, & (n \neq 2) \\[2ex] \frac{1}{2\pi} \log \circ \| \cdot \|, & (n = 2). \end{cases}$$

Wir schreiben Δ für den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie

$$\Delta E(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren $\phi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) f(x-y) \, dy.$$

(Vergleichen Sie diese Formel mit dem Faltungsprodukt.)

(b) Beweisen Sie, dass

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) \Delta f(x-y) \, dy.$$

(c) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y) \big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y \big\rangle + f(x-y) \big\langle \operatorname{grad} E(y), y \big\rangle \, dy.$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y\big\rangle\, dy = \epsilon^{n-1}\int_{S^{n-1}} E(\epsilon y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon y), y\big\rangle\, dy$$

und

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-y)\big\langle \operatorname{grad} E(y), y\big\rangle\, dy = \frac{1}{\operatorname{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(x-\epsilon y)\, dy.$$

Folgern Sie, dass

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(y)\big\langle \operatorname{grad} f(x-y), y\big\rangle\, dy = 0$$

und

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-y)\big\langle \operatorname{grad} E(y), y\big\rangle\, dy = f(x).$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(\epsilon)} E(y)\psi(y)\, dy$$

existiert.

Wir definieren $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\phi_\epsilon(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(f) Beweisen Sie

$$\Delta\phi(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Delta\phi_\epsilon(x) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Lösung:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wenn $n \in \mathbb{N}\setminus\{2\}$, dann

$$\begin{aligned}
\Delta\|x\|^{2-n} &= \sum_{k=1}^n \partial_k^2\|x\|^{2-n}\\
&= (2-n)\sum_{k=1}^n \partial_k\|x\|^{-n}x_k\\
&= (2-n)\sum_{k=1}^n\Big(-n\|x\|^{-n-2}x_k^2 + \|x\|^{-n}\Big)\\
&= (2-n)\Big(-n\|x\|^{-n} + n\|x\|^{-n}\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wenn $n = 2$, dann

$$\begin{aligned}
\Delta\log(\|x\|) &= \sum_{k=1}^2 \partial_k^2\log(\|x\|)\\
&= \sum_{k=1}^2 \partial_k\frac{x_k}{\|x\|^2}\\
&= \sum_{k=1}^2\Big(\frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2x_k^2}{\|x\|^4}\Big)\\
&= \Big(\frac{2}{\|x\|^2} - 2\frac{1}{\|x\|^2}\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ und sei $\phi : U \times \overline{V} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, sodass $\phi\big|_{U\times V}$ glatt ist. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, sodass $\overline{\Omega}$ kompakt und in V erhalten ist. Wir werden beweisen, dass die Abbildung $\Phi : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\Phi(x) = \int_\Omega \phi(x, y)\, dy \qquad (x \in V)$$

glatt ist und für alle $\mu \in N_0^n$

$$\partial^\mu \Phi(x) = \int_\Omega \partial_x^\mu \phi(x, y)\, dy \qquad (x \in U). \tag{1}$$

Die Aussage folgt mit Induktion nach die Länge von μ, wenn die Aussage für $|\mu| = 1$ wahr ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Wir schreiben e_k für die k^{te} standard Basisvektor. Sei $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Phi(x + te_k) - \Phi(x)}{t} - \int_\Omega \partial_{x_k} \phi(x, y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_\Omega \frac{\phi(x + te_k, y) - \phi(x, y)}{t} - \partial_{x_k} \phi(x, y)\, dy \right| \\
&\leq \int_\Omega \left| \frac{\phi(x + te_k, y) - \phi(x, y)}{t} - \partial_{x_k} \phi(x, y) \right| dy.
\end{aligned}$$

Wenn t hinreichend klein ist, gibt es nach der Satz von Taylor ein $u \in \mathbb{R}^n$ sodass

$$\phi(x + te_k, y) = \phi(x, y) + \partial_{x_k} \phi(x, y) t + \frac{1}{2} \partial_{x_k}^2 \phi(u, y) t^2.$$

Es folgt

$$\left| \frac{\Phi(x + te_k) - \Phi(x)}{t} - \int_\Omega \partial_{x_k} \phi(x, y)\, dy \right| \leq \frac{1}{2} \sup |\partial_{x_k}^2 \phi| \mathrm{vol}(\Omega) t$$

Die rechte Seite konvergiert, wenn $t \to 0$. Es folgt, dass Φ partiel differenzierbar ist und

$$\partial_{x_k} \Phi(x) = \int_\Omega \partial_{x_k} \phi(x, y)\, dy.$$

Wie zuvor gesagt, folgt mit Induktion, dass Φ glatt ist und (1) gilt.

Da f kompakt getragen ist, und die Integrand $E(y)f(x - y)$ glatt von x und y abhängt, dürven wir Differentitation und Integration verwechseln und bekommen

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \Delta \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) f(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(\epsilon)} E(y) \Delta f(x - y)\, dy.$$

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und sei $r > 0$ so groß, dass $\mathrm{supp}\big(f(x - \cdot)\big)$. Sei $\Omega = \overline{B^n(r)} \setminus B^n(\epsilon)$. Es gilt

$$\Delta \phi_\epsilon(x) = \int_\Omega E(y) \Delta f(x - y)\, dy.$$

Da ΔE gleich 0 ist auf Ω, gilt nach der zweite Idententität von Green

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega E(y) \Delta f(x - y)\, dy \\
&\quad = \int_\Omega E(y) \Delta f(x - y) - f(x - y) \Delta E(y)\, dy \\
&\quad = \int_{\partial\Omega} E(u) \langle \mathrm{grad}_u f(x - u), \nu(u) \rangle - f(x - u) \langle \mathrm{grad}\, E(u), \nu(u) \rangle\, du \\
&\quad = -\int_{\partial\Omega} E(u) \langle \mathrm{grad}\, f(x - u), \nu(u) \rangle - f(x - u) \langle \mathrm{grad}\, E(u), \nu(u) \rangle\, du,
\end{aligned}$$

wobei du das Flächenmaß auf $\partial\Omega$ und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld ist. (Bemerke, dass $\Delta f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$, wobei $\Delta_y = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\cdot$.)
Es gilt

$$\partial\Omega = S^{n-1}(r) \cup S^{n-1}(\epsilon)$$

und

$$\nu(x) = -\frac{1}{\epsilon}x \qquad \big(x \in S^{n-1}(\epsilon)\big).$$

Da $f\big|_{S^{n-1}(r)} = 0$, folgt

$$\int_\Omega E(y)\Delta f(x-y)\,dy = \frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(u)\langle \operatorname{grad} f(x-u), u\rangle + f(x-u)\langle \operatorname{grad} E(u), u\rangle\,du.$$

(d) Für alle stetige Funktionen ϕ auf eine offene Umgebung von $S^{n-1}(\epsilon)$ gilt

$$\int_{S^{n-1}(\epsilon)} \phi(u)\,du = \epsilon^{n-1}\int_{S^{n-1}} \phi(\epsilon u)\,du.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-u), u\big\rangle\,du &= \epsilon^{n-2}\int_{S^{n-1}} E(\epsilon u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), \epsilon u\big\rangle\,du \\ &= \epsilon^{n-1}\int_{S^{n-1}} E(\epsilon u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\,du\end{aligned}$$

Wenn $n \neq 2$, dann

$$\begin{aligned}&\epsilon^{n-1}\left|\int_{S^{n-1}} E(\epsilon u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\,du\right| \\ &\quad= \frac{\epsilon}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\left|\int_{S^{n-1}} \big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\,du\right| \\ &\quad\leq \frac{\epsilon}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} \big|\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\big|\,du \\ &\quad\leq \frac{\epsilon}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} \|\operatorname{grad} f(x-\epsilon u)\|\,du \\ &\quad\leq \frac{\epsilon}{(2-n)}\sup_{u\in B^{n-1}} \|\operatorname{grad} f(x-u)\|\,du.\end{aligned}$$

Wenn $n = 2$, dann

$$\begin{aligned}\epsilon\left|\int_{S^1} E(\epsilon u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\,du\right| &= \frac{\epsilon\log(\epsilon)}{2\pi}\left|\int_{S^1} \big\langle \operatorname{grad} f(x-\epsilon u), u\big\rangle\,du\right| \\ &\leq \epsilon\log(\epsilon)\sup_{u\in B^2}\|\operatorname{grad} f(x-u)\|\end{aligned}$$

In beide Fälle konvergiert die rechte Seite gegen 0 wenn $\epsilon \downarrow 0$ und darum gilt

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} E(u)\big\langle \operatorname{grad} f(x-u), u\big\rangle\,du = 0.$$

Es gilt

$$\operatorname{grad} E(u) = \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\|u\|^{-n}u \qquad (u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

und darum

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-u)\big\langle \operatorname{grad} E(u), u\big\rangle\,du &= \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-u)\|u\|^{2-n}\,du\\ &= \epsilon^{1-n}\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}(\epsilon)} f(x-u)\,du\\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_{S^{n-1}} f(x-\epsilon u)\,du.\end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $f(x)$, wenn $\epsilon \downarrow 0$.

(e) Sei $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(\epsilon)} E(y)\psi(y)\,dy = \int_\epsilon^\infty\int_{S^{n-1}} r^{n-1}E(r\omega)\psi(r\omega)\,d\omega\,dr$$

Wenn $n \neq 2$, dann

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(\epsilon)} E(y)\psi(y)\,dy = \frac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\int_\epsilon^\infty\int_{S^{n-1}} r\psi(r\omega)\,d\omega\,dr.$$

Wenn $n = 2$, dann

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B^2(\epsilon)} E(y)\psi(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_\epsilon^\infty\int_{S^1} r\log(r)\psi(r\omega)\,d\omega\,dr.$$

In beide Fälle gibt es eine stetig Fortsetzung der Integrand nach $[0,\infty)\times S^{n-1}$ und darum

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(\epsilon)} E(y)\psi(y)\,dy &= \begin{cases}\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}\dfrac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\displaystyle\int_\epsilon^\infty\int_{S^{n-1}} r\psi(r\omega)\,d\omega\,dr, & (n\neq 2)\\[2ex] \lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\epsilon^\infty\int_{S^1} r\log(r)\psi(r\omega)\,d\omega\,dr, & (n=2)\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\displaystyle\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} r\psi(r\omega)\,d\omega\,dr, & (n\neq 2)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_{S^1} r\log(r)\psi(r\omega)\,d\omega\,dr, & (n=2).\end{cases}\end{aligned}$$

(f) Nach (e) gilt

$$\phi(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\displaystyle\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} rf(x-r\omega)\,d\omega\,dr, & (n\neq 2)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_{S^1} r\log(r)f(x-r\omega)\,d\omega\,dr, & (n=2).\end{cases}$$

In beide Fälle ist die Integrand stetig als Funktion auf $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\times S^{n-1}$ und glatt auf dass Innere von $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\times S^{n-1}$. Es folgt aus die Lösung von (b), dass ϕ glatt ist und

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \displaystyle\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r\Delta_x f(x - r\omega)\, d\omega\, dr, & (n \neq 2) \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^\infty \int_{S^1} r \log(r) \Delta_x f(x - r\omega)\, d\omega\, dr, & (n = 2). \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} \dfrac{1}{(2-n)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \displaystyle\int_\epsilon^\infty \int_{S^{n-1}} r\Delta_x f(x - r\omega)\, d\omega\, dr, & (n \neq 2) \\ \lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\epsilon^\infty \int_{S^1} r \log(r) \Delta_x f(x - r\omega)\, d\omega\, dr, & (n = 2). \end{cases} \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \Delta\phi_\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Aus (d) folgt $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \Delta\phi_\epsilon(x) = f(x)$.