Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

2. Übungsblatt

Hausaufgabe 2.1 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \big(x \in (-R, R)\big).$$

Beweisen Sie, dass die Taylorreihe von f mit Entwicklungsstelle 0 übereinstimmt mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
Lösung: Nach Korollar 7.27 im Skript von Müller oder Präsenzaufgabe 12.2 von Analysis 1 ist f differenzierbar und gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Mit Induktion folgt, dass f unendlich oft differenzierbar ist und für $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{k+n} x^k.$$

Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Es folgt, dass die Taylorreihe von f und die Potenzreihe f gleich sind.

Hausaufgabe 2.2 Geben Sie ein Beispiel von zwei topologischen Räumen X und Y mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{T}_{X \times Y} = \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.
Lösung: Seien X und Y einelementige Mengen. Es gibt nur ein Topologie $\mathcal{T}_X$ ($\mathcal{T}_Y$) auf X (Y): die diskrete Topologie. Auch $X \times Y$ ist einelementig und

$$\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y = \{\emptyset, X \times Y\}$$

ist die diskrete Topologie auf $X \times Y$. Weil $X \times Y$ einelementig ist, gibt es nur ein Topologie auf $X \times Y$. Darum ist die Produkttopologie $\mathcal{T}_{X \times Y}$ auf $X \times Y$ gleich $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

Hausaufgabe 2.3 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Beweisen Sie die folgende Aussage. Eine Teilmenge A von Y ist genau dann abgeschlossen bezüglich der von X induzierten Topologie auf Y, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge B von X gibt, sodass $A = B \cap Y$.
Lösung: Sei $\mathcal{T}$ der von X induzierten Topologie auf Y, dass heißt $U \in \mathcal{T}$ genau dann wenn es eine offene Teilmenge V von X gibt, sodass $U = V \cap Y$.
Wenn $A \subseteq Y$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$ ist, dann $(A^c \cap Y) \in \mathcal{T}$. Es gibt eine offene Teilmenge V von X, sodass $A^c \cap Y = V \cap Y$. Es gilt $A \cup Y^c = V^c \cup Y^c$ und damit

$$A \cap Y = (A \cup Y^c) \cap Y = (V^c \cup Y^c) \cap Y = V^c \cap Y.$$

V^c is eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Nehme jetzt an, dass es eine abgeschlossene Teilmenge B von X gibt, sodass $A = B \cap Y$. Es gilt $A^c = B^c \sup Y^c$ und damit

$$A^c \cap Y = (B^c \cup Y^c) \cap Y = B^c \cap Y.$$

Weil B^c eine offene Teilmenge von X ist, gilt $(A^c \cap Y) \in \mathcal{T}$. Es folgt, dass $A = (A^c \cap Y)^c \cap Y$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$ ist.

Hausaufgabe 2.4 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen.

(a) $\partial(\partial A) = \partial A$,

(b) $\partial A \neq A$,

(c) $\overline{A} \neq A^\circ$.

Lösung:

(a) Sei $X = \mathbb{R}$ versehen mit der übliche metrische Topologie und $A = \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

und

$$\partial(\partial A) = \partial \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset.$$

(b) Sei $X = \mathbb{R}$ versehen mit der übliche metrische Topologie und $A = \{0\}$. A ist abgeschlossen und $A^\circ = \emptyset$. Darum gilt $\partial(A) = \{0\} = A$.

(c) Sei $A = \emptyset$. Dann ist A offen und abgeschlossen. Darum gilt $\overline{A} = A = A^\circ$.

Hausaufgabe 2.5 Seien X und Y topologische Räume. Wir betrachten $X \times Y$ versehen mit der Produktopologie. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Bestimmen Sie den Rand von $A \times B$ in $X \times Y$.
Lösung: Wir werden beweisen, dass

$$\partial(A \times B) = \big((\partial A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times (\partial B)\big). \tag{1}$$

Dazu beweisen wir erst

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}. \tag{2}$$

Bemerke, dass $\overline{A} \times \overline{B} = (\overline{A} \times Y) \cap (X \times \overline{B})$. Die Menge $\overline{A} \times Y$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ weil $(\overline{A} \times Y)^c = \overline{A}^c \times Y$ offen ist. Auf gleiche Weise folgt, dass $X \times \overline{B}$ abgeschlossen ist. Die Schnitt von abgeschlossene Teilmengen ist wieder abgeschlossen. Es folgt, dass $\overline{A} \times \overline{B}$ abgeschlossen ist. Es gilt $A \subseteq \overline{A}$ und $B \subseteq \overline{B}$ und damit $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$. Weil $\overline{A} \times \overline{B}$ abgeschlossen ist, folgt, dass $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$.

Sei jetzt $x \in \overline{A}$ und $y \in \overline{B}$. Wir werden zeigen, dass jede Umgebung von (x, y) eine nicht-leere Schnitt mit $A \times B$ hat. Dies beweist, dass $(x, y) \in \overline{A \times B}$. Sei U eine Umgebung von x in $X \times Y$. Weil

$$\{V \times W : V \subseteq X \text{ offen}, W \subseteq Y \text{ offen}\} \tag{3}$$

eine Basis für die Produkttopologie ist, gibt es offene Mengen $V \subseteq X$ und $W \subseteq Y$, sodass $(x, y) \in V \times W \subseteq U$. Weil $x \in \overline{A}$, gilt $V \cap A \neq \emptyset$. Auf gleiche Weise folgt $W \cap B \neq \emptyset$ und darum

$$U \cap (\overline{A} \times \overline{B}) \supseteq (V \times W) \cap (\overline{A} \times \overline{B}) = (V \cap \overline{A}) \times (W \cap \overline{B}) \neq \emptyset.$$

Dies beweist, dass $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Weil (x, y) beliebig war, folgt $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$. Damit ist (2) bewiesen.

Jetzt beweisen wir

$$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ. \tag{4}$$

Weil $A^\circ \times B^\circ$ offen ist und $A^\circ \times B^\circ \subseteq A \times B$, gilt $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A \times B)^\circ$. Sei jetzt $(x, y) \in (A \times B)^\circ$. Wir werden beweisen, dass $x \in A^\circ$ und $y \in B^\circ$. Weil (3) eine Basis für die Produkttopologie ist und $(A \times B)^\circ$ eine Umgebung von (x, y), gibt es offene Mengen $V \subseteq X$ und $W \subseteq Y$, sodass

$$(x, y) \in V \times W \subseteq (A \times B)^\circ \subseteq A \times B.$$

Insbesondere gilt $x \in V \subseteq A$ und $y \in W \subseteq B$. Weil V und W offen sind gilt $V \subseteq A^\circ$ und $W \subseteq B^\circ$. Es folgt, dass $(A \times B)^\circ \subseteq A^\circ \times B^\circ$. Damit ist (4) bewiesen.
Jetzt beweisen wir (1). Nach (2) und (4) gilt

$$\begin{aligned}
\partial(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus (A \times B)^\circ \\
&= (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (A^\circ \times B^\circ) \\
&= \Big((\overline{A} \setminus A^\circ) \times \overline{B} \Big) \cup \Big(\overline{A} \times (\overline{B} \setminus B^\circ) \Big) \\
&= \big((\partial A) \times \overline{B} \big) \cup \big(\overline{A} \times (\partial B) \big).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2.6 Beweisen Sie, dass die kofinite Topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ auf einer unendlichen Menge X nicht Hausdorffsch ist. Schliessen Sie, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ nicht metrisch ist.
Lösung: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wenn $U, V \in \mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ mit $x \in U$ und $y \in V$, dann ist $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ eine Vereinigung endlicher Mengen und damit endlich. Weil X unendlich ist, folgt, dass $U \cap V \neq \emptyset$. Dies beweist, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ nicht Hausdorffsch ist.
Eine metrische Topolgie ist Hausdorffsch. Da $\mathcal{T}_{\mathrm{cf},X}$ nicht Hausdorffsch ist, kann sie auch nicht metrisch sein.