Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f mit Entwicklungsstelle a, wobei

(a) $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = 0$,

(b) $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = \pi$,

(c) $f = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $a = 1$.

In welche Fällen stimmen f und die Taylorreihe überein?
Lösung:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \sin(x)\big|_{x=0} = (-1)^k \sin(0) = 0,$$
$$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \sin(x)\big|_{x=0} = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$

Die Taylorreihe von $f = \sin$ mit Entwicklungsstelle 0 ist darum gleich

$$Tf(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Die Taylorreihe $Tf(x,0)$ und $f = \sin$ sind gleich auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \cos(x)\big|_{x=\pi} = (-1)^k \cos(\pi) = (-1)^{k+1},$$
$$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \cos(x)\big|_{x=\pi} = (-1)^{k+1} \sin(\pi) = 0.$$

Die Taylorreihe von $f = \cos$ mit Entwicklungsstelle π ist darum gleich

$$Tf(x,\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x-\pi)^{2k}.$$

Weil

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gilt

$$Tf(x,\pi) = -\cos(x-\pi) = -\frac{1}{2}\big(e^{i(x-\pi)} + e^{i(\pi-x)}\big) = -\frac{1}{2}\big(-e^{ix} - e^{-ix}\big) = \cos(x).$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{d^k}{dx^k}\sqrt{x}\big|_{x=1} = \left(\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-n\right)\right) x^{\frac{1}{2}-k}\big|_{x=1} = \prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-n\right).$$

Sei $\binom{s}{k}$ die verallgemeinerte binomial Koeffizient wie definiert auf Seite 83 im Skript von Müller. Dann gilt

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\sqrt{x}\big|_{x=1} = \frac{\prod_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-n\right)}{k!} = \binom{\frac{1}{2}}{k}.$$

Die Taylorreihe von $f = \sqrt{\cdot}$ mit Entwicklungsstelle 1 ist deshalb gegeben durch

$$Tf(x,1) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(x-1)^k$$

Bemerke, dass $Tf(x,1)$ und die um 1 verschobene Binomialreihe $B_{\frac{1}{2}}(x-1)$. Nach Folgerung 5.21 in Müllers Skript gilt

$$Tf(x,1) = B_{\frac{1}{2}}(x-1) = \sqrt{x} \qquad \big(x \in (0,2)\big).$$

Für $x > 2$ ist die Taylorreihe divergent.

Präsenzaufgabe 2.2 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & (x > 0) \\ 0, & (x \leq 0) \end{cases}$$

mit Entwicklungsstelle $a = -1, 0, 1$. In welche Fällen stimmen f und die Taylorreihe überein?
Lösung: Wenn $a = -1$ oder $a = 0$, dann gilt

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x)\big|_{x=a} = 0.$$

Sehen Sie Präsenzaufgabe 12.3 von Analysis 1. In beide Fälle gilt, dass die Taylorreihe $Tf(x,a)$ von f mit Entwicklungspunkt a gleich 0 ist. Es gilt $Tf(x,a) = f(x)$ genau dann, wenn $x \leq 0$.
Sei $p_0 = 1$ und für $k \in \mathbb{N}$, sei p_k das Polynom gegeben durch $p_k(x) := -x^2 p'_{k-1}(x) + x^2 p_{k-1}(x)$. Offensichtlich gilt $f = p_0 f$. Nehme an, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ wenn $x > 0$. Dann gilt für alle $x > 0$

$$f^{(k+1)}(x) = p'_k\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + p_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Mit Induktion folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)f(x).$$

Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $a = 1$ wird gegeben durch

$$Tf(x;1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-1}p_k(1)}{k!}(x-1)^k. \tag{1}$$

Nach Folgerung 5.21 in Müllers Skript gilt

$$\frac{1}{x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (x-1)^n \qquad \big(x \in (0,2)\big).$$

Darum gilt

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{x}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{-k}{n} \right) (x-1)^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Man kann jetzt die Polynome p_n berechnen und zeigen, dass (1) und (2) übereinstimmen. Alternativ kann man aus Hausaufgabe 2.1 schließen, dass weil f aus $(0,2)$ gegeben wird von die Potenzreihe (2), die Taylorreihe $Tf(x,1)$ und f gleich sind auf $(0,2)$.

Präsenzaufgabe 2.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar und sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Lösung: Sei $T_2 f(y;x)$ das zweite Taylorpolynom von f mit Entwicklunspunkt x. Es gibt nach Korollar 9.3 im Skript von Müller für alle y ein ξ zwischen x und y so dass

$$f(x) - T_2 f(y;x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{(n+1)!} (y-x)^3.$$

Sei $\epsilon > 0$ und sei

$$C := \max_{\xi \in [x-\epsilon, x+\epsilon]} |f^{(3)}(\xi)|.$$

Für all $y \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$ gilt

$$|f(x) - T_2 f(y;x)| \leq C|y-x|^3.$$

Wenn $|h| < \epsilon$, dann folgt aus die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \\ &\quad \leq \left| \frac{T_2 f(x+h;x) - 2f(x) + T_2 f(x-h;x)}{h^2} - f''(x) \right| \\ &\qquad\qquad + \left| \frac{f(x+h) - T_2 f(x+h;x)}{h^2} \right| + \left| \frac{f(x-h) - T_2 f(x-h;x)}{h^2} \right| \\ &\quad \leq \left| \frac{T_2 f(x+h;x) - 2f(x) + T_2 f(x-h;x)}{h^2} - f''(x) \right| + 2C|h|. \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned} &T_2 f(x+h;x) - 2f(x) + T_2 f(x-h;x) \\ &\quad = \Big(f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2\Big) - 2f(x) + \Big(f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2\Big) \\ &\quad = f''(x)h^2 \end{aligned}$$

und darum

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-f''(x)\right| \leq \left|\frac{f''(x)h^2}{h^2}-f''(x)\right| + 2C|h| = 2C|h| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Präsenzaufgabe 2.4 Sei $M = \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie alle Topologien auf M. Welche Topologien sind T_1 und welche sind Hausdorffsch?
Lösung: Eine $\mathcal{T}$ Teilmenge der Potenzmenge von M ist genau dann ein Topologie, wenn

$$\begin{aligned}
&\emptyset, M \in \mathcal{T}\\
&A \cup B \in \mathcal{T} \text{ für alle } A, B \in \mathcal{T}\\
&A \cap B \in \mathcal{T} \text{ für alle } A, B \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

Bemerke, dass wenn $A, B \subseteq \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, M\}$, dann entweder $A = B = A \cap B$, oder $A \cap B = \emptyset$, oder $A \cap B$ ist eine einelementige Menge.
Wir listen alle Teilmengen $\mathcal{T}$ der Potenzmenge mit diese Eigenschaften. Wir fangen an mit die chaotische oder triviale Topologie.

(1) $\{\emptyset, M\}$

Die Topologien mit 3 Teilmengen kommen in zwei Geschmäcke.

(2) $\{\emptyset, \{1\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, M\}$, $\{\emptyset, \{3\}, M\}$

(3) $\{\emptyset, \{1,2\}, M\}$, $\{\emptyset, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2,3\}, M\}$

Für Topologien mit 4 Teilmengen gibt es auch zwei Möglichkeiten. Wenn $A, B \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, M\}$ und $A \neq B$, dann entweder $A \cap B = \emptyset$ oder $A \cap B$ ist eine einelementige Menge. Im ersten Fall gilt $A \cup B = M$. Im zweiten Fall muss $A \cap B$ gleich A oder gleich B sein. Die Topologien mit 4 Teilmengen sind darum

(4) $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, M\}$

(5) $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, M\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{3\}, \{2,3\}, M\}$

Jetzt listen wir die Topologien mit 5 Teilmengen. Wenn $\mathcal{T}$ aus 5 Teilmengen besteht, dann gibt es drei verschiedene Teilmengen $A, B, C \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, M\}$. Wenn A, B beide einelementige Mengen sind, dann ist $C = A \cup B$. Wenn A, B beide zweielementige Teilmengen sind, dann ist $C = A \cap B$ einelementig. Die Topologien mit 5 Teilmengen sind darum

(6) $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$

(7) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, M\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, M\}$

Jetzt betrachten wir die Topologien $\mathcal{T}$ mit 6 Teilmengen. Es gibt 4 verschieden Teilmengen $A, B, C, D \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset, M\}$. Wenn A, B, C einelementige Mengen wären, dann sind $\{1\}$, $\{2,\}$ und $\{3\}$ und alle Vereinigungen erhalten in $\mathcal{T}$. Dann wäre $\mathcal{T}$ die Diskrete Topologie. Es gibt darum maximal 2 verschiedene einelementige Mengen in $\mathcal{T}$. Wenn A, B, C zweielementige Mengen wären, dann wäre $\mathcal{T}$ auch gleich die Diskrete Topologie. Es gibt darum auch maximal 2 verschiedene zweielementige Mengen in $\mathcal{T}$. Es folgt, dass es genau 2 einelementige und 2 zweielementige Teilmengen in $\mathcal{T}$ gibt. Wenn A, B einelementig sind und C, D zweielementig, dann is $A \cup B = C$ oder $A \cup B = D$. Auch gilt $C \cap D = A$ oder $C \cap D = B$. Es gibt folgende Möglichkeiten.

(8) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, M\}$,
$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, M\}$,
$\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$

Zum Schluss gibt es noch die diskrete Topologie.

(9) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M\}$,

Wenn $\mathcal{T}$ ein Topologie auf M ist, dann nennt man zwei Punkte x und y topologisch nicht unterscheidbar, falls x und y die gleichen Umgebungen besitzen, dass heisst jede offene Menge U enthält genau dann x, wenn sie y enthält. Für die Topologien in (1), (2), (3), (4) gibt es nicht topologisch unterscheidbare Punkten $x, y \in M$. Insbesondere sind diese Topologien nicht T_1 oder Hausdorffsch.
Für die Topologien in (5) und (7) sind alle Pare von Punkten zwar topologisch unterschiedbar, aber es gibt immer ein Punkt $x \in M$ mit die Eigenschaft, dass die einzige Umgebung von x gleich M ist. Diese Topologien sind darum auch nicht T_1 oder Hausdorffsch. Für die Topologien in (6) und (7) gibt es $x, y \in M$, sodass $y \in U$ für jede Umgebung U von x. Diese Topologien sind darum nicht T_1 oder Hausdorffsch.
Die diskrete Topologie ist Hausdorff und darum auch T_1.

Man kann auch direct beweisen, dass nur die diskrete Topologie T_1 ist, wie folgt. Sei $\mathcal{T}$ ein T_1-Topologie auf M. Wir werden erst beweisen, dass alle einelementige Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind. Sei $x \in M$. Für jede $y \in M$ gibt es ein $U \in \mathcal{T}$, sodass $y \in U$, aber $x \notin U$. Es folgt, dass das Komplement von $\{x\}$ die Vereinigung von offene Mengen ist. Es folgt, dass $\{x\}^c$ offen und deshalb $\{x\}$ abgeschlossen ist.
Jetzt beweisen wir, dass alle einelementige Teilmengen offen sind. Sei $x \in M$. Weil M endlich ist, ist $\{x\}^c$ eine endliche Vereinigung von einelementige Teilmengen $\{y\}$ mit $y \notin M$. Weil einelementige Teilmengen abgeschlossen sind, ist auch $\{x\}^c$ abgeschlossen. Dies beweist, dass $\{x\}$ offen ist.
Wir haben beweisen dass $\{x\} \in \mathcal{T}$ für alle $x \in M$. Alle vereinigungen von einelementige Teilmengen sind darum auch in $\mathcal{T}$ erhalten. Es folgt, dass jede Teilmenge von M in $\mathcal{T}$ enthalten ist und damit, dass $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie ist.

Präsenzaufgabe 2.5 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen.

(a) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

(b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,

(c) $\overline{(A^\circ)} = A$,

(d) $(\overline{A})^\circ = A$.

Lösung:

(a) $\overline{(\overline{A})}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge worin $\overline{A}$ enthalten ist. Da $\overline{A}$ selbst abgeschlossen ist, gilt $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(b) $(A^\circ)^\circ$ is die größte offen Teilmenge enthalten in A°. Weil A° offen ist, gilt $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(c) *Gegenbeispiel:* Sei $X = \mathbb{R}$ mit die Standarttopologie und $A = \{0\}$. Dann gilt $A^\circ = \emptyset$ und darum $\overline{A^\circ} = \emptyset \neq A$.

(d) *Gegenbeispiel:* Seien X und A gleich wie in (c). Dann ist A abgeschlossen und deshalb $(\overline{A})^\circ = A^\circ = \emptyset \neq A$.

Präsenzaufgabe 2.6 Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf V. Dann sind gleichbedeutend:

1. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent,
2. $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{B}_{\|\cdot\|_2}$,
3. $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$.

Diese Aufgabe wird am Donnerstag 30. April in die Fragestunde besprochen.