Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

3. Übungsblatt

Hausaufgabe 3.1

(a) Sei $f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Warum ist f kein Homöomorphismus?

(b) Warum ist ein nicht-kompakter topologischer Raum niemals homöomorph zu einem kompakten topologischen Raum?

Lösung:

(a) Die Abbildung f ist bijektiv. Damit ist f ein Homöomorphismus wenn f stetig und offen ist. Wir behaupten, dass f nicht offen ist. Sei $0 < \epsilon < \pi$. Dann ist $[0, \epsilon) = (-1, \epsilon) \cap [0, 2\pi)$ offen in $[0, 2\pi)$. In jede offene Umgebung von $(1, 0) \in S^1$ gibt es Elementen $(x, y) \in S^1$ mit $y < 0$. Aber $f([0, \epsilon)) \subseteq \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$. Weil $(1, 0) \in f([0, \epsilon))$ folgt, dass $f([0, \epsilon))$ nicht offen ist.

(b) Seien X, Y topologischen Räume und $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Wir behaupten erst, dass X genau dann Hausdorffsch ist, wenn Y Hausdorffsch ist. Nehme an, dass Y Hausdorffsch ist. Seien $x_1, y_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Weyl Y Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V_1 und V_2 von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Weil f stetig ist, sind $f^{-1}(V_1)$ und $f^{-1}(V_2)$ offene Umgebungen von x_1 und x_2 und

$$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset.$$

Es folgt, dass X Hausdorffsch ist. Die umgekehrte Implikation bekommen wir, wenn wir X und Y verwechseln und f^{-1} statt f betrachten.

Nehme jetzt an, dass X homöomorph ist zu Y und, dass X kompakt ist. Nach der Definition ist X Haussdorff und damit auch Y. Weil f stetig ist, gilt nach Satz 6 in Forster, dass $Y = f(X)$ kompakt ist.

Hausaufgabe 3.2 Sei X eine Menge und

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass d eine Ultrametrik auf X ist. Beweisen Sie weiter, dass die von d induzierte metrische Topologie auf X die diskrete Topologie ist.

Lösung: Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$. Auch folgt direkt aus der Definition, dass $d(x, y) = d(y, x)$. Seien $x, y, z \in X$. Wenn $d(x, z) = 0$, dann folgt $d(x, z) = 0 \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(y, z)$. Wenn $d(x, z) = 1$, dann gilt $x \neq z$ und damit $x \neq y$ oder $y \neq z$. Es folgt, dass $d(x, y) + d(y, z) \geq \max\{d(x, y), d(y, z)\} = 1 = d(x, y)$. Wir haben jetzt nicht nur die Dreiecksungleichung, aber auch die Ultrametrische Ungleichung bewiesen.

Sie $x \in X$. Der Ball $B(x, \frac{1}{2})$ mit Mittelpunkt x und Radius $\frac{1}{2}$ ist gleich $\{x\}$. Es folgt, dass $\{x\}$ für jede $x \in X$ offen ist. Weil alle Einelementigemengen offen sind, ist die Topologie die diskrete Topologie.

Hausaufgabe 3.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede stetige Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum ist abgeschlossen, d.h. bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.

(b) Jede stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.

Lösung:

(a) Seien X, Y topologischen Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Nehme, an, dass X kompakt (und damit auch Hausdorfsch) und Y Hausdorffsch ist. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. A ist nach Satz 4 in Forster kompakt. Nach Satz 6 in Forster ist dann auch $f(A)$ kompakt. Satz 4 impliziert dann dass $f(A)$ abgeschlossen ist.

(b) Seien X, Y topologischen Räume und $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Nehme, an, dass X kompakt und Y Hausdorffsch ist. In (a) haben wir bewiesen, dass f abgeschlossen ist. Es folgt, dass Urbilder von abgeschlossene Teilmengen von X unter f^{-1} abgeschlossen sind. Nach Präsenzaufgabe 3.1 ist f^{-1} stetig und damit ist f ein Homöomorphismus.

Hausaufgabe 3.4 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und sei

$$L(V, W) := \{A : V \to W : A \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\|\cdot\|_{V,W} : L(V, W) \to \mathbb{R}_{\geq 0}; \qquad A \mapsto \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V}$$

eine Norm auf $L(V, W)$ ist. Beweisen Sie weiter, dass $L(V, W)$ versehen mit $\|\cdot\|_{V,W}$ ein Banauchraum ist, wenn W ein Banachraum ist. Die Norm $\|\cdot\|_{V,W}$ heißt die Operatornorm auf $L(V, W)$.

Lösung: Sei $A \in L(V, W)$. Wenn A stetig ist, dann ist $v \mapsto \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V}$ beschränkt nach Präsenzaufgabe 3.6. Es folgt, dass $\|A\|$ wohldefiniert ist. Weil

$$\left\{\frac{1}{\|v\|_V} v : v \in V \setminus \{0\}\right\} = \{v \in V : \|v\|_V = 1\},$$

gilt

$$\|A\|_{V,W} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \left\| A\left(\frac{1}{\|v\|_V} v\right)\right\|_W = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} \|A(v)\|_W.$$

Wenn $A \neq 0$, dann gibt es ein $v \in V$, sodass $\|Av\| > 0$. Es folgt, dass

$$\|A\|_{V,W} \geq \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V} > 0.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|\lambda A\|_{V,W} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|(\lambda A)(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} |\lambda| \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V} = |\lambda|\, \|A\|.$$

Auch die Dreiecksungleichung gilt, da für $A, B \in L(V, W)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{V,W} &= \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|A(v)+B(v)\|_W \\
&\leq \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} (\|A(v)\|_w + \|B(v)\|_W) \\
&\leq \Big(\sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|A(v)\|_w \Big) + \Big(\sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|B(v)\|_W \Big) \\
&= \|A\|_{V,W} + \|B\|_{V,W}.
\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $\|\cdot\|_{V,W}$ eine Norm auf $L(V, W)$ ist.

Wir nehmen jetzt an, dass W eine Banachraum ist und werden beweisen, dass $\big(L(V, W), \|\cdot\|_{V,W}\big)$ vollständig ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$. Sei $v \in V$. Wir werden erst beweisen, dass $\big(A_n(v)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Wenn $v = 0$, dann ist nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen an, dass $v \neq 0$. Sei $\epsilon > 0$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|A_n - A_m\|_{V,W} < \frac{\epsilon}{\|v\|_V}$ für alle $m, n \geq N$. Dann

$$\|A_n(v) - A_m(v)\|_W \leq \|A_n - A_m\|_{V,W} \|v\|_V < \epsilon.$$

Es folgt, dass $\big(A_n(v)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W ist. Weil W vollständig ist, is die folge konvergent.

Wir definieren $A : V \to W$ durch

$$A(v) := \lim_{n\to\infty} A_n(v) \qquad (v \in V).$$

Weil für alle $v \in V$ die Folge $\big(A_n(v)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist A wohldefiniert. Es ist noch zu zeigen, dass $A \in L(V, W)$. Für alle $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$A(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n(v_1) + \mu A_n(v_2) = \lambda A(v_1) + \mu A(v_2).$$

Damit ist bewiesen, dass A linear ist. Jetzt werden wir beweisen, dass A stetig ist. Wir zeigen erst, dass $\big(\|A_n\|_{V,W}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Sei $\epsilon > 0$. Weil $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|A_n - A_m\|_{V,W} < \epsilon$ für alle $n, m > N$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{V,W}$ folgt

$$\Big| \|A_n\|_{V,W} - \|A_m\|_{V,W} \Big| \leq \|A_n - A_m\|_{V,W} < \epsilon.$$

Dies beweist, dass $(\|A_n\|_{V,W})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist die Folge konvergent und damit beschränkt. Es gibt also ein $C > 0$, sodass

$$\|A_n\|_{V,W} \leq C \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sei jetzt $v \in V$. Sei $\epsilon > 0$ und sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\|A(v) - A_n(v)\|_W < \epsilon$. Es gilt

$$\|A(v)\|_W \leq \|A(v) - A_n(v)\|_W + \|A_n(v)\|_W \leq \epsilon + \|A_n\|_{V,W} \|v\|_V \leq \epsilon + C\|v\|_V.$$

Weil dies gilt für alle $\epsilon > 0$, folgt

$$\|A(v)\|_W \leq C\|v\|_V,$$

und darum

$$\sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|A(v)\|_W}{\|v\|_V} \leq C.$$

Nach Präsenzaufgabe 3.6 ist A stetig.

Hausaufgabe 3.5 Sei I ein kompaktes Interval und sei V der Vektorraum der Regelfunktionen auf I versehen mit der Supremumsnorm. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\int : V \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \int_I \phi(x)\,dx$$

stetig ist. Bestimmen Sie die Operatornorm von $\int$.

Lösung: Sei $\phi \in R(I)$. Es gilt

$$\left| \int_I \phi(x)\,dx \right| \leq \int_I |\phi(x)|\,dx \leq \sup_{x \in I} |\phi(x)| \int_I dx = \|\phi\| \mathrm{vol}(I).$$

Es folgt, dass

$$\sup_{\phi \in R(I) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int_I \phi(x)\,dx \right|}{\|\phi\|} \leq \mathrm{vol}(I).$$

Nach Präsenzaufgabe 3.5 ist $\int$ stetig. Wenn ϕ die konstante Funktion $x \mapsto 1$ ist, gilt

$$\frac{\left| \int_I \phi(x)\,dx \right|}{\|\phi\|} = \mathrm{vol}(I).$$

Es folgt, dass die Operatornorm von $\int$ gleich $\mathrm{vol}(I)$ ist.