Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

4. Übungsblatt

Wir schreiben $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für die übliche Bilinearform

$$(x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

und $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ auf $\mathbb{R}^n$.

Präsenzaufgabe 4.1 Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Wir nennen γ differenzierbar, wenn jede Komponente γ_i differenzierbar ist. Beweisen Sie, dass γ genau dann differenzierbar ist wenn die Limiten in $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\gamma(t+h) - \gamma(t)\big) \qquad \big(t \in (a,b)\big)$$

existieren.

Präsenzaufgabe 4.2 Die Zykloide beschreibt die Bahn eines Punktes p auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1 in $\mathbb{R}^2$, der auf der x-Achse der x-y-Ebene mit konstanter Geschwindigkeit abrollt, siehe Bild 4.7 in Abschnitt 1.7 in Forster. Wir nehmen an, dass dieser Punkt p im Ursprung $(0,0)$ zur Zeit $t = 0$ beginnt. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve, sodass $\gamma(t)$ die Koordinaten des Punktes p zur Zeit t darstellt.

(a) Sei $\gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass $\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ der Mittelpunkt des Kreises ist. Geben Sie die Formel für $\gamma_0(t)$ an.

(b) Sei $\gamma_1 := \gamma - \gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Welche Kurve stellt γ_1 dar? Geben Sie ein Formel für $\gamma_1(t)$ an.

(c) Geben Sie ein Formel für $\gamma(t)$ an.

(d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes p für alle $t \in \mathbb{R}$.

(e) Sei $T > 0$. Berechnen Sie die Bogenlänge $\phi(T)$ des Teils der Zykloide der zu den Parameterwerten $0 \leq t \leq T$ gehört.

(f) Beweisen Sie, dass $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ein Homöomorphismus ist.

(g) Beweisen Sie, dass $\delta := \gamma \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(h) Berechnen Sie die Geschwindigkeit δ' und Beschleunigung δ'' von δ.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\langle \delta'(t), \delta''(t)\rangle = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Präsenzaufgabe 4.3 Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Kurve. Beweisen Sie, dass γ genau dann nach der Bogenlänge parametrisiert ist, wenn es ein $t_0 \in (a,b)$ mit $\|\gamma'(t_0)\| = 1$ gibt und

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0 \qquad \big(t \in (a,b)\big).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von $t \mapsto \|\gamma'(t)\|^2$.

Präsenzaufgabe 4.4 Berechnen Sie alle Richtungsableitungen der Funktion

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$$

Hausaufgabe 4.1 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Kurve und sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$\phi(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\|\, ds$$

(a) Beweisen Sie, dass ϕ differenzierbar und strikt monoton steigend ist.

(b) Beweisen Sie, dass ϕ ein Homöomorphismus $[a,b] \to [0,L]$ ist, wobei $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$.

(c) Sei $\delta := \gamma \circ \phi^{-1}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Identität

$$\phi' \cdot (\delta' \circ \phi) = \gamma'.$$

(d) Beweisen Sie, dass δ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Hausaufgabe 4.2 Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine C^3-Kurve parametriziert nach der Bogenlänge. Die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad t \mapsto \|\gamma''(t)\|$$

heisst die Krümmung der Kurve γ. Wir nehmen an, dass $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$. Sei weiter $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$n(t) := \frac{1}{\kappa(t)}\gamma''(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Vektor $n(t)$ heißt Hauptnormaleneinheitsvektor. Zum Schluss, sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$b(t) := \gamma'(t) \times n(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Vektor $b(t)$ heißt Binormaleneinheitsvektor.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a,b)$ die Vektoren $\gamma'(t)$, $n(t)$, $b(t)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a,b)$

$$\langle b'(t), b(t)\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle b'(t), \gamma'(t)\rangle = 0.$$

Folgern Sie, dass $b'(t)$ ein Vielfaches von $n(t)$ ist.

(c) Sei $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tau(t) := -\langle b'(t), n(t)\rangle \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

$\tau(t)$ heißt die Torsion der Kurve δ. Zeigen Sie, dass für alle $t \in (a,b)$

$$b'(t) = -\tau(t)n(t).$$

Hausaufgabe 4.3 Eine Kurve $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ heißt eine verallgemeinerte Helix wenn es ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$t \mapsto \langle \gamma'(t), v \rangle$$

konstant ist. Seien $r, c > 0$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(a) Beschreiben Sie die Kurve $\Gamma := \gamma(\mathbb{R})$. Malen Sie ein Bild.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit γ' und Beschleunigung γ'' von γ.

(c) Zeigen Sie, dass γ eine verallgemeinerte Helix ist.

(d) Bestimmen Sie eine Reparametrisierung δ der Kurve Γ nach der Bogenlänge.

(e) Bestimmen Sie die Krümmung und Torsion von δ.

Nach dem Satz von Lancret ist eine dreimal stetig differenzierbare Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung genau dann eine verallgemeinerte Helix, wenn ihre Torsion ein konstantes Vielfaches ihrer Krümmung ist.

Hausaufgabe 4.4 Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie dass f kurvendifferenzierbar in jedem Punkt (x,y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist.

(b) Seien e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass die Richtungsableitungen $\partial_{e_1} f(0)$ und $\partial_{e_2} f(0)$ existieren wenn $c = 0$.

(c) Nehme an, dass $c = \frac{1}{2}$. Für welche $v \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$.