Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

5. Übungsblatt

Hausaufgabe 5.1 Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + \sin(x_2) \\ x_1^3 x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(x) := \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $Df(x)$ und $Dg(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie $D(f \circ g)(x)$ und $Df(g(x)) \cdot Dg(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$

Lösung:

(a)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(x_2) \\ 3x_1^2 x_2 & x_1^3 \end{pmatrix}, \qquad Dg(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + \sin(x_1 x_2) \\ e^{3x_1} x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$D(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + x_2 \cos(x_1 x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) \\ (3x_1 x_2 + x_2) e^{3x_1} & e^{3x_1} x_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$Df\big(g(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(x_1 x_2) \\ 3e^{2x_1} x_1 x_2 & e^{3x_1} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} Df\big(g(x)\big) \cdot Dg(x) &= \begin{pmatrix} 1 & \cos(x_1 x_2) \\ 3e^{2x_1} x_1 x_2 & e^{3x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x_1} + x_2 \cos(x_1 x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) \\ 3e^{3x_1} x_1 x_2 + x_2 e^{3x_1} & x_1 e^{3x_1} \end{pmatrix} \\ &= D(f \circ g)(x). \end{aligned}$$

Hausaufgabe 5.2 Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Nehmen Sie an, dass es ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$Av = \lambda v.$$

Ein Vektor v mit dieser Eigenschaft nennt man einen Eigenvektor von A; die Zahl λ nennt man Eigenwert von A. Nehmen Sie weiter an, dass $\|v\| = 1$. Definiert sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (x, \mu) \mapsto \big(Ax - \mu x, \|x\|^2 - 1\big).$$

(a) Beweisen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(b) Beweisen Sie die folgenden Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Df(x,\mu)(y,0) &= \big(Ay - \mu y, 2\langle x, y\rangle\big) \\ Df(x,\mu)(0,1) &= (-x, 0). \end{aligned}$$

(c) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ mit $v_1 = v$. Zeigen Sie, dass die Matrix von $A - \mu I$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von der Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda-\mu & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & Av_2 - \mu v_2 & \ldots & Av_n - \mu v_n \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Matrix von $Df(v,\mu)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = \{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, 1)\}$ von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda-\mu & & & & -1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & Av_2 - \mu v_2 & \ldots & Av_n - \mu v_n & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist.

(e) Beweisen Sie die Identität

$$\det Df(v,\mu) = 2\frac{\det(A - \mu I)}{\lambda - \mu} \qquad (\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}).$$

(f) Zeigen Sie

$$\det Df(v,\lambda) = \lim_{\mu \to \lambda} 2\frac{\det(A - \mu I)}{\lambda - \mu}.$$

Lösung:

(a) Die Komponentenfunktionen von f sind alle Polynomfunktionen und damit glatt. Darum ist auch f glatt.

(b)

$$\begin{aligned} Df(x,\mu)(y,0) &= \frac{d}{dt} f(x + ty, \mu)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(A(x+ty) - \mu(x+ty), \|x+ty\|^2 - 1\Big)\Big|_{t=0} \\ &= \Big(\frac{d}{dt}\big(Ax + tAy - \mu x - t\mu y\big)\big|_{t=0}, \frac{d}{dt}\big(\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - 1\big)\big|_{t=0}\Big) \\ &= \big(Ay - \mu y, 2\langle x, y\rangle\big) \\ Df(x,\mu)(0,1) &= \frac{d}{dt} f(x, \mu + t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(Ax - \mu x - tx, \|x\|^2 - 1\Big)\Big|_{t=0} \\ &= (-x, 0). \end{aligned}$$

(c) Da $v_1 = v$ einen Eigenvekter mit Eigenwert λ ist, gilt $Av_1 = \lambda v_1$ und damit $(A-\mu)v_1 = (\lambda-\mu)v_1$. Die erste Spalte in die Matrix von $A-\mu I$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist darum

$$\begin{pmatrix} \lambda-\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die übriche Spalten sind die Koordinaten der Vektoren $Av_i - \mu v_i$ mit $2 \le i \le n$.

(d) Aus (b) folgt, dass das Block der Größe $n-1 \times n-1$ links oben in die Matrix, die Matrix für $A-\mu I$ aus (c) gleich ist. Die erste n Matrixkoeffizienten in die letzte Zeile werden gegeben durch die Zahlen $2\langle v, v_i\rangle$. Da $\mathcal{B}$ eine orthonormale Basis ist, gilt

$$\langle v, v_i\rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = 1 \\ 0, & \text{falls } i = 0. \end{cases}$$

Die erste Matrixkoeffizient in die letzte Zeile ist darum gleich 2 und die nächste $n-1$ sind gleich 0. Die letzte Spalte wird gegeben durch die Koordinaten des Vektors $Df(v,\mu)(0,1) = (-v,0)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Da v die erste Basisvektor ist, ist die erste Matrixkoeffizient in diese Spalte gleich -1 und alle ander Matrixkoeffizienten sind gleich 0.

(e) Die Matrix von $Df(v,\mu)$ für $\mu \in \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = \{(v_1,0),\dots,(v_n,0),(0,1)\}$ von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist der Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \lambda-\mu & & \chi^t & & -1 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ \vdots & & B & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

wobei $\chi \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $B \in \mathrm{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$. Wir verwechseln die erste und letzte Zeile und bekommen

$$\begin{aligned} \det Df(v,\mu) = &= \det \left(\begin{array}{c|ccc|c} \lambda-\mu & & \chi^t & & -1 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ \vdots & & B & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &= -\det \left(\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ \vdots & & B & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline \lambda-\mu & & \chi^t & & -1 \end{array}\right) \\ &= 2\det(B) \end{aligned}$$

Die Matix von $A-\mu I$ aus (c) ist jetzt gleich

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda-\mu & \chi^t \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

und darum gilt

$$\det(A - \mu I) = (\lambda - \mu) \det(B).$$

Es folgt, dass

$$(\lambda - \mu) \det Df(v, \mu) = 2(\lambda - \mu) \det(B) = 2 \det(A - \mu I).$$

(f) Nach (a) ist f stetig differenzierbar. Darum ist die Abbildung $\mu \to \det Df(v, \mu)$ stetig. Es folgt, dass

$$Df(v, \lambda) = \lim_{\mu \to \lambda} Df(v, \mu) = \lim_{\mu \to \lambda} 2 \frac{\det(A - \mu I)}{\lambda - \mu}.$$

Hausaufgabe 5.3 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{falls } xy \neq 0 \\ 0, & \text{falls } xy = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\partial_x \partial_y f(0, 0)$ und $\partial_y \partial_x f(0, 0)$.

(b) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Satz von Schwarz? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Weil arctan eine glatte Funktion ist, ist f glatt auf $\{(x, y) : x, y \neq 0\}$. Wir berechnen erst $\partial_x f(x, y)$. Es gilt für alle $x, y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x, y) &= 2x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{-y}{x^2} - y^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} \\
&= 2x \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y, \\
\partial_x f(x, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, 0) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0, \\
\partial_x f(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0, \\
\partial_x f(0, y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \arctan\left(\frac{y}{h}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{h}{y}\right) - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} h \arctan\left(\frac{y}{h}\right) - y^2 \lim_{h \to 0} \frac{\arctan\left(\frac{h}{y}\right) - 0}{h} \\
&= -y.
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung haben wir benützt, dass arctan beschränkt ist und $\arctan'(0) = 1$ gilt. Auf gleiche Weise bekommen wir

$$\begin{aligned}
\partial_y f(x, y) &= -2y \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + x \\
\partial_y f(0, y) &= 0, \\
\partial_y f(0, 0) &= 0, \\
\partial_y f(x, 0) &= x.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die zweite partielle Ableitungen berechnen. Für $x, y \neq 0$ gilt

$$\partial_x \partial_y f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1,$$
$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Obwohl $\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$, ist das Ergebnis nicht im Widerspruch zu dem Satz von Schwarz, da nicht alle zweite partielle ableitungen stetig sind: zum Beispeil gilt für $x, y \neq 0$

$$\partial_x \partial_y f(x,y) = -2y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} + 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

und damit

$$\lim_{t \to 0} \partial_x \partial_y f(t,t) = \lim_{t \to 0} 0 = 0 \neq 1 = \partial_x \partial_y f(0,0).$$