Universität Paderborn Sommersemester 2020
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Analysis 2

6. Übungsblatt

Hausaufgabe 6.1 (Homogene Funktionen) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, dass f (positiv) homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$

$$f(tx) = t^\lambda f(x).$$

(a) Nehmen Sie an, dass f differenzierbar und homogen vom Grad λ ist. Beweisen Sie Eulers Identität:

$$\langle x, \mathrm{grad} f(x) \rangle = \lambda f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{1}$$

(b) Umgekehrt, beweisen Sie, dass f homogen vom Grad λ ist, wenn f differenzierbar ist und die Differenzialgleichung (1) erfüllt.

Lösung:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da f differenzierbar ist, ist die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch $g(t) = f(tx)$, auch differenzierbar. Weil f homogen vom Grad λ ist, gilt $g(t) = t^\lambda f(x)$ und damit

$$g'(t) = \lambda t^{\lambda-1} f(x)$$

Andererseits gilt

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(tx) = Df(tx)x = \langle x, \mathrm{grad} f(tx) \rangle.$$

Für $t = 1$ folgt

$$f(x) = g'(1) = \langle x, \mathrm{grad} f(x) \rangle.$$

(b) Wir nehmen jetzt an, dass f differenzierbar ist und (1) erfüllt. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Funktion

$$h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}; \qquad t \mapsto t^{-\lambda} f(tx).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
h'(t) &= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx) + t^{-\lambda} Df(tx)x \\
&= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx) + t^{-\lambda} \langle x, \mathrm{grad} f(tx) \rangle \\
&= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx) + t^{-\lambda-1} \langle tx, \mathrm{grad} f(tx) \rangle \\
&= -\lambda t^{-\lambda-1} f(tx) + t^{-\lambda-1} \lambda f(tx) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass h konstant ist. Weil $h(1) = f(x)$, gilt

$$t^{-\lambda} f(tx) = h(t) = f(x) \qquad (t > 0)$$

und damit

$$f(tx) = t^\lambda f(x) \qquad (t > 0).$$

Hausaufgabe 6.2 Sei $X = [0, \infty)$ und sei $f : X \to X$ gegeben durch

$$f(x) = x + e^{-x} \qquad (x \in X).$$

(a) Beweisen Sie, dass f eine Kontraktion ist, d. h.

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad (x, y \in X, x \neq y).$$

(b) Besitzt f Fixpunkte?

(c) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Fixpunktsatz von Banach?

Lösung:

(a) Seien $x, y \in [0, \infty)$ mit $x \neq y$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $x < y$. Nach der Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x, y)$, sodass

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$$

Es folgt, dass

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|\,|f'(\xi)| = |x - y|\,|1 - e^{-\xi}| = |x - y|\,(1 - e^{-\xi}) < |x - y|.$$

(b) Sei $x \geq 0$. Wenn $f(x) = x$, dann folgt $x + e^{-x} = x$ und damit $e^{-x} = 0$. Es gibt kein x mit diese Eigenschaft und darum gibt es kein Fixpunkt von f.

(c) Das Ergebnis ist nicht im Widerspruch zu den Fixpunktsatz von Banach weil f nicht Lipschitzstetig mit eine Lipschitzkonstante strikt kleiner 1 ist: wenn $0 < L$ die Eigenschaft hat, dass

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y| \qquad (x, y \in X),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} L &\geq \limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x) - f(x+1)|}{|x - (x+1)|} \\ &= \limsup_{x\to\infty} |f(x) - f(x+1)| \\ &= \limsup_{x\to\infty} |x + e^{-x} - (x+1) - e^{-x-1}| \\ &= \lim_{x\to\infty} |-1 + e^{-x} - e^{-x-1}| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 6.3 (Newtonverfahren) Sei V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Abbildung. Sei $x_0 \in V$ und $\delta > 0$, sodass der abgeschlossene Ball U in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius δ enthalten ist in V. Wir nehmen an, dass f eine Nullstelle in U besitzt. Das hier beschriebene Verfahren um die Nullstelle zu finden, heißt das Newtonverfahren. Wir brauchen dafür die folgenden Bedingungen.

1. Für alle $x \in U$ ist $Df(x)$ invertierbar und es gibt ein $c_1 > 0$, sodass

$$\|Df(x)^{-1}\|_{\text{op}} \leq c_1 \qquad (x \in U),$$

2. Es gibt ein $c_2 > 0$, sodass

$$\|D^2 f(x)\|_{\text{op}} < c_2 \qquad (x \in U),$$

3. $c_1\Big(\|f(x_0)\| + \frac{1}{2}c_2\delta^2\Big) \leq \delta$,

4. $\frac{1}{2}c_1^2c_2\|f(x_0)\| < 1$.

Nach etwaige Verkleinerung von δ und Wahl von x_0 hinreichend nah an der Nullstelle, können diese Bedingungen immer erfüllt werden, wenn für alle $x \in V$ die Lineare Abbildung $Df(x)$ invertierbar ist.

(a) Sei $x \in U$. Sei $R_1(x, x_0) := f(x_0) - f(x) - Df(x)(x - x_0)$. Betrachten Sie die Taylorformel mit Stützpunkt x und die Abschätzung für $R_1(x, x_0)$ und beweisen Sie, dass

$$\|x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| \leq c_1\|Df(x)(x_0 - x) + f(x)\| \leq \delta.$$

Folgern Sie, dass das Bild der Abbildung

$$F : U \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x - Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)$$

in U erhalten ist.

Wir definieren rekursiv

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie die Taylorentwicklung erster Ordnung von f im Punkt x_k. Beweisen Sie, dass es ein $\xi \in U$ gibt, sodass

$$f(x_{k+1}) = \frac{1}{2}D^2f(\xi)\Big(Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big), Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\Big)$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Ungleichung gilt

$$\|f(x_{k+1})\| \leq \frac{c_1^2c_2}{2}\|f(x_k)\|^2$$

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1^2c_2}\epsilon^{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0),$$

wobei $\epsilon = \frac{c_1^2c_2}{2}\|f(x_0)\|$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\| \leq \frac{2}{c_1c_2}\epsilon^{2^k}.$$

(e) Beweisen Sie, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und dass der Limes dieser Folge eine Nullstelle von f in U ist.

Lösung:

(a) Es gilt

$$x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big) = Df(x)^{-1}\Big(Df(x)(x_0 - x) + f(x)\Big).$$

Aus Annahme 1. folgt

$$\begin{aligned}\|x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| &= \Big\|Df(x)^{-1}\Big(Df(x)(x_0 - x) + f(x)\Big)\Big\| \\ &\leq \big\|Df(x)^{-1}\big\|_{\mathrm{op}}\, \|Df(x)(x_0 - x) + f(x)\| \\ &\leq c_1\, \|Df(x)(x_0 - x) + f(x)\|\,.\end{aligned}$$

Weil $Df(x)(x_0 - x) + f(x) = f(x_0) - R_1(x, x_0)$, folgt

$$\begin{aligned}\|x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| &\leq c_1 \|f(x_0) - R_1(x, x_0)\| \\ &\leq c_1 \Big(\|f(x_0)| + \|R_1\|\Big)\end{aligned}$$

Nach der Satz von Taylor gibt es ein ξ auf die Gerade zwischen x und x_0, sodass

$$R_1(x, x_0) = \frac{1}{2} D^2(\xi)(x - x_0, x - x_0).$$

Es folgt aus Annahme 2., dass

$$|R_1(x, x_0)| = \frac{1}{2}\big|D^2(\xi)(x - x_0, x - x_0)\big| \leq \frac{1}{2}\|D^2(\xi)\|_{\mathrm{op}}\|x - x_0\|^2 \leq \frac{c_2}{2}\|x - x_0\|^2.$$

Wenn $x \in U$, dann gilt $\|x - x_0\| < \delta$ und darum

$$\|x_0 - x + Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| < c_1\Big(\|f(x_0)| + \frac{c_2}{2}\delta^2\Big) \leq \delta.$$

Für die letzte Ungleichung haben wir die dritte Annahme verwendet.

Sei

$$F : U \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto x - Df(x)^{-1}\big(f(x)\big).$$

Für alle $x \in U$ gilt

$$\|F(x) - x_0\| = \|x - x_0 - Df(x)^{-1}\big(f(x)\big)\| \leq \delta.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Taylorentwicklung erster Ordnung von f im Punkt x_k ist

$$f(x) = f(x_k) + Df(x_k)(x - x_k) + R_1(x_k, x).$$

Wenn wir $x = x_{k+1}$ betrachten, dann bekommen wir

$$\begin{aligned}f(x_{k+1}) &= f(x_k) + Df(x_k)\Big(x_k - Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big) - x_k\Big) + R_1(x_k, x_{k+1}) \\ &= f(x_k) - f(x_k) + R_1(x_k, x_{k+1}) \\ &= R_1(x_k, x_{k+1}).\end{aligned}$$

Nach der Satz von Taylor gibt es ein ξ auf die Gerade zwischen x_{k+1} und x_k, sodass

$$\begin{aligned}f(x_{k+1}) &= R_1(x_k, x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2} D^2 f(\xi)(x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{1}{2} D^2 f(\xi)\Big(Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big), Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\Big)\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\|f(k+1)\| &= \frac{1}{2}\Big\|D^2 f(\xi)\Big(Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big), Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\Big)\Big\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2 f(\xi)\|_{\mathrm{op}}\|Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2 f(\xi)\|_{\mathrm{op}}\|Df(x_k)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2\|f(x_k)\|^2\end{aligned}$$

Aus Annahme 1. und 2. folgt

$$\|f(k+1)\| \leq \frac{c_2 c_1^2}{2}\|f(x_k)\|^2.$$

(c) Für $k = 0$ gilt

$$\|f(x_0)\| = \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon = \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon^{2^k}.$$

Wir nehmen an, dass

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon^{2^k}$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\|f(x_{k+1})\| \leq \frac{c_2 c_1^2}{2}\|f(x_k)\|^2 \leq \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon^{2^{k+1}}.$$

Mit Induktion folgt, dass

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon^{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(d) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|Df(x_k)^{-1}\big(f(x_k)\big)\| \leq \|Df(x_k)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1 c_2}\epsilon^{2^k}.$$

(e) Die vierte Annahme ist gleichbedeutend an $\epsilon < 1$. Wir zeigen erst, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\eta > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\epsilon^{2^N} < \frac{c_1 c_2(1-\epsilon)}{2}\eta$. Für $n \geq m > N$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \|\sum_{j=m}^{n-1} x_{j+1} - x_j\| \\
&\leq \sum_{j=m}^{n-1} \|x_{j+1} - x_j\| \\
&\leq \frac{2}{c_1 c_2}\sum_{j=m}^{n-1} \epsilon^{2^j} \\
&= \frac{2}{c_1 c_2}\epsilon^{2^m}\sum_{j=m}^{n-1} \epsilon^{2^j - 2^m} \\
&\leq \frac{2}{c_1 c_2}\epsilon^{2^m}\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \\
&= \frac{2}{c_1 c_2(1-\epsilon)}\epsilon^{2^m} \\
&< \eta.
\end{aligned}$$

Dies beweisst, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Es folgt, dass die Folge konvergent ist. Sei $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da f stetig ist, gilt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k).$$

Aus (c) folgt

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{2}{c_1^2 c_2}\epsilon^{2^k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

und damit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0.$$