Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 (Fixpunktsatz von Banach) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $0 \leq \epsilon < 1$, dass heißt

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \epsilon\, d(x, y) \qquad \big(x, y \in X\big).$$

Ein Punkt $x \in X$ ist ein Fixpunkt von f wenn $f(x) = x$ gilt. Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.

Sehen Sie Lemma 3.1.8 im Skript von Soergel.

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $X = (0, \infty)$ versehen mit der üblichen euklidischen Metrik. Sei $f : X \to X$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad (x \in X).$$

(a) Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante kleiner 1.

(b) Besitzt f Fixpunkte?

(c) Ist Ihr Ergebnis im Widerspruch zu dem Fixpunktsatz von Banach?

Lösung:

(a) Für $x, y \in X$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = \big|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\big| = \frac{1}{2}|x - y|.$$

Es folgt, dass f lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstant $\frac{1}{2}$.

(b) Wenn $f(x) = x$, dann gilt $\frac{x}{2}x = x$ and damit $x = 0$. Weil $0 \notin X$, besitzt f keine Fixpunkte.

(c) Das Ergebnis ist nicht im Widerspruch zu dem Fixpunktsatz, da X nicht vollständig ist.

Präsenzaufgabe 6.3 (Stetiger Umkehrsatz) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitzkonstante $\epsilon < 1$. Wir definieren

$$f : U \to \mathbb{R}^n; \qquad x \mapsto x - g(x).$$

(a) Beweisen Sie die Formel

$$\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - \epsilon)\|x - y\| \qquad (x, y \in U).$$

(i) Folgern Sie, dass f injektiv ist.

(ii) Sei $V := f(U)$ versehen mit der Relativtopologie. Folgern Sie, dass $f : U \to V$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Für $y \in \mathbb{R}^n$, sei $\Phi_y : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\Phi_y(x) = x - f(x) + y = g(x) + y \qquad (x \in U).$$

Beweisen Sie, dass Φ_y lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante ϵ ist.

Sei $x_0 \in U$ und sei $r > 0$, sodass $B(x_0, r) \subseteq U$.

(c) Nehmen Sie an, dass $y \in B\big(f(x_0), (1-\epsilon)r\big)$. Beweisen Sie, dass

$$\Phi_y\Big(B(x_0, r)\Big) \subseteq B(x_0, r).$$

Zeigen Sie, dass Φ_y genau ein Fixpunkt in $B(x_0, r)$ besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass $x \in U$ genau dann ein Fixpunkt von Φ_y ist, wenn $f(x) = y$.

(e) Folgern Sie, dass $B\big(f(x_0), (1-\epsilon)r\big) \subseteq f\Big(B(x_0, r)\Big)$.

(f) Folgern Sie, dass V offen ist.

Sehen Sie Satz 3.1.10 im Skript von Soergel.

Präsenzaufgabe 6.4 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und sei $f : U \to V$ eine C^1-Abbildung. Definieren Sie

$$Tf : U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^p; \qquad (x, X) \mapsto \big(f(x), Df(x)X\big).$$

Die Abbildung Tf heißt die Tangentialabbildung von f. Sei weiter $g : V \to \mathbb{R}^q$ eine C^1-Abbildung. Beweisen Sie dass die Kettenregel für f und g umgeschrieben werden kann zur folgenden Identität der Tangentialabbildungen Tf und Tg:

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Lösung: Es gilt

$$Tf \circ Tg(x, X) = Tf\big(g(x), Dg(x)X\big) = \Big(f\big(g(x)\big), Df\big(g(x)\big)Dg(x)X\Big)$$

und

$$T(f \circ g)(x, X) = \Big(f(g(x)), D(f \circ g)(x)X\Big).$$

Es folgt, dass die Identität $Tg \circ Tf = T(f \circ g)$ und die Kettenregel $D(f \circ g) = \big(Df \circ g\big) \circ Dg$ gleichbedeutend sind.

Präsenzaufgabe 6.5 Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4 f\big((x, y), 0\big)$ vierter Ordnung in 0 von der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto \sin(xy)e^{y\sin(x)}.$$

Geben Sie eine Abschätzung für $R_4((x, y), 0) = f(x, y) - T_4 f((x, y), 0)$.

Lösung: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha| \leq 4$ sei $c_\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$T_4 f\big(v, 0\big) = \sum_{|\alpha| \leq 4} c_\alpha v^\alpha \qquad \big(v \in \mathbb{R}^2\big).$$

Wenn wir $v \in \mathbb{R}^2$ fest nehmen, dann ist

$$T_4 f\big(tv, 0\big) = \sum_{k=0}^{4} t^k \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha v^\alpha$$

das vierte Taylorpolynom von $t \mapsto f(tv)$. Es gilt

$$f(tv) = T_4 f\big(tv, 0\big) + R_4(tv, 0) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei es ein $c > 0$ (abhängig von v) gibt, sodass

$$|R_4(tv, 0)| \le ct^5.$$

Wir werden das $T_4 f\big((x, y), 0\big)$ bestimmen durch das vierte Taylorpolynom von $t \mapsto f(tx, ty)$ für feste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen.
Das zweite Taylorpolynom von $\sin(u)$ an der Entwicklungsstelle 0 ist gleich u. Für $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(u) = u + \frac{1}{6}\sin^{(3)}(\xi)u^3,$$

wobei ξ eine Zahl zwischen 0 und u ist. Sei r_1 die Funktion gegeben durch $r_1(u) = \sin(u) - u$. Dann

$$|r_1(u)| \le \frac{1}{6}|u|^3.$$

Auf gleiche Weise bekommen wir

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}e^{\xi}u^2,$$

wobei ξ eine Zahl zwischen 0 und u ist. Sei r_2 die Funktion gegeben durch $r_2(u) = e^u - (1 + u)$. Dann gilt für $u \le 1$

$$\big|r_2(u)\big| \le \frac{e}{2}|u|^2.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ fest und $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(tx, ty) = \sin(t^2xy)e^{ty\sin(tx)} &= \Big(t^2xy + r_1(t^2xy)\Big)\Big(1 + ty\sin(tx) + r_2\big(ty\sin(tx)\big)\Big) \\
&= \Big(t^2xy + r_1(t^2xy)\Big)\Big(1 + t^2xy + ty\,r_1(tx) + r_2\big(ty\sin(tx)\big)\Big) \\
&= t^2xy + t^4x^2y^2 + r_{x,y}(t),
\end{aligned}$$

wobei

$$r_{x,y}(t) = r_1(t^2xy)\Big(1+t^2xy+ty\,r_1(tx)+r_2\big(ty\sin(tx)\big)\Big)+t^2xy\Big(ty\,r_1(tx)+r_2\big(ty\sin(tx)\big)\Big)$$

Für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t|\,|y| \le 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&|r_{x,y}(t)| \\
&\le |r_1(t^2xy)|\Big(1 + t^2|x|\,|y| + |t|\,|y|\,|r_1(tx)| + |r_2\big(ty\sin(tx)\big)|\Big) + t^2|x|\,|y|\Big(t|y|\,|r_1(tx)| + |r_2\big(ty\sin(tx)\big)|\Big) \\
&\le \frac{1}{6}t^6|x|^3\,|y|^3\Big(1 + t^2|x|\,|y| + \frac{1}{6}t^4|x|^3\,|y| + \frac{e}{2}t^2|\sin(tx)|^2\,|y|^2|\Big) + t^2|x|\,|y|\Big(\frac{1}{6}t^4|x|^3\,|y| + \frac{e}{2}t^2|\sin(tx)|^2\,|y|^2\Big) \\
&\le \frac{1}{6}t^6|x|^3\,|y|^3 + \frac{1}{6}t^8|x|^4\,|y|^4 + \frac{1}{36}t^{10}|x|^6\,|y|^4 + \frac{e}{12}t^{10}|x|^5\,|y|^5| + \frac{1}{6}t^6|x|^4\,|y|^2 + \frac{e}{2}t^6|x|^3\,|y|^3.
\end{aligned}$$

Hier haben wir benützt, dass $|\sin(tx)| \le |t|\,|x|$. Wenn $|t|\,|x|, |t|\,|y| < 1$, dann können wir die Glieder in diese Summe der Form $t^{k+l}|x|^k\,|y|^l$ mit $k, l > 3$ abschätzen durch $t^6|x|^3\,|y|^3$ Es folgt, dass es Konstanten c_1 und c_2 (unabhängig von x, y) gibt, sodass für hinreichend kleine t

$$|r_{x,y}(t)| \le c_1t^6|x|^3\,|y|^3 + c_2t^6|x|^4\,|y|^2. \tag{1}$$

Die Funktion $r_{x,y}$ ist glatt und aus (1) folgt, dass die Ableitungen von $r_{x,y}$ bis auf fünfter Ordnung in 0 verschwinden. Damit ist $xyt^2 + x^2y^2t^4$ das vierte (und auch sofort das fünfte) Taylorpolynom von $t \mapsto f(tx, ty)$ und eine Abschätzung von $R_4\big((tx, ty), 0\big) = r_{x,y}(t)$ wird gegeben durch (1).
Es folgt, dass

$$T_4 f\big((x, y), 0\big) = xy + x^2y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Weiter gilt für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x|, |y| < 1$ die Abschätzung

$$|R_4\big((x, y), 0\big)| \le c_1|x|^3\,|y|^3 + c_2|x|^4\,|y|^2.$$

Zum Schluß bemerken wir noch, dass das fünfte Taylorpolynom $T_5 f\big((x, y), 0\big)$ auch gegeben wird durch

$$T_5 f\big((x, y), 0\big) = xy + x^2y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$