Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

# Analysis 2

## 7. Übungsblatt

**Präsenzaufgabe 7.1** Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto xy - x^2 - y^2 - 2x + 4.$$

(a) Berechnen Sie $Df$ und die kritischen Punkte von $f$.

(b) Berechnen Sie die Hessesche von $f$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Hesseschen in jedem kritischen Punkt.

(d) Untersuchen Sie, ob an diesen kritischen Punkten lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

**Präsenzaufgabe 7.2** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $A$.

**Präsenzaufgabe 7.3** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x-y^2} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f$und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$ und skizzieren Sie diese.

(d) Begründen Sie, daß die Funktion $f$ ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

(e) Skizzieren Sie qualitativ die Niveaulinien der Funktion $f$.

**Hausaufgabe 7.1** Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto 3xy - x^3y^3.$$

(a) Berechnen Sie $Df$ und die kritischen Punkte von $f$.

(b) Berechnen Sie die Hessesche von $f$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Hesseschen in jedem kritischen Punkt.

(d) Untersuchen Sie, ob an diesen kritischen Punkten lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(e) Begründen Sie, daß die Funktion $f$ beschränkt auf $[-2,2] \times [-2,2]$ ist, dort ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

**Hausaufgabe 7.2** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f$ und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$ und skizzieren Sie diese.

(c) Begründen Sie, daß die Funktion $f$ ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

(d) Skizzieren Sie qualitativ die Niveaulinien der Funktion $f$.

**Hausaufgabe 7.3** Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{x^2 y}$$

im Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Abgabetermin der Hausaufgaben: Montag, 8. Juni 2020, 9 Uhr via Panda.