Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

7. Übungsblatt

Hausaufgabe 7.1 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto 3xy - x^3y^3.$$

(a) Berechnen Sie Df und die kritischen Punkte von f.

(b) Berechnen Sie die Hessesche von f.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Hesseschen in jedem kritischen Punkt.

(d) Untersuchen Sie, ob an diesen kritischen Punkten lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(e) Begründen Sie, daß die Funktion f beschränkt auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$ ist, dort ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

Lösung:

(a) Es gilt

$$Df(x, y) = \big(3y - 3x^2y^3, 3x - 3x^3y^2\big) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Die Menge C der kritischen Punkte von f ist die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sodass $Df(x, y) = (0, 0)$, das heißt

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(1 - x^2y^2) = x(1 - x^2y^2) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = 0 \text{ oder } x^2y^2 = 1\} \\ &= \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, \frac{\pm 1}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} -6xy^3 & 3 - 9x^2y^2 \\ 3 - 9x^2y^2 & -6x^3y \end{pmatrix} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(c) Wir betrachten zuerst $(x, y) = (0, 0)$. Es gilt

$$\mathrm{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerten sind ± 3. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert -3 ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}$ und die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 3 ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}$. Sei jetzt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt

$$\mathrm{Hess}f\left(x, \frac{\pm 1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \mp 6\frac{1}{x^2} & -6 \\ -6 & \mp 6x^2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerten sind die Lösungen der Gleichung

$$\lambda \pm (6\frac{1}{x^2} + 6x^2)\lambda = \det\left(\lambda I_2 - \mathrm{Hess}f\left(x, \frac{\pm}{x}\right)\right) = 0.$$

Die Eigenwerten sind damit 0 und $\mp 6\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 0 ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \mp x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\mp 6\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)$ ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm x^2 \end{pmatrix} \setminus \{0\}$.

(d) In $(0,0)$ liegt ein Sattelpunkt vor. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto 3u - u^3$. Dann gilt

$$f(x,y) = \phi(xy) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Es gilt $\phi'(u) = 0$ genau dann, wenn $u = \pm 1$ und $\phi''(\pm 1) = \mp 3$. Damit hat ϕ ein lokales Maximum in $u = 1$ und ein lokales Minimum in $u = -1$. Es folgt, dass die Menge $\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$ aus lokale Maxima und die Menge $\left\{\left(x, \frac{-1}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$ aus lokale Minima besteht.

(e) Weil f stetig und $[-2,2] \times [-2,2]$ kompakt ist, nimmt f ihr Maximum und Minimum auf $[-2,2] \times [-2,2]$ an. Es gilt

$$\{xy : (x,y) \in [-2,2]] \times [-2,2]\} = [-4,4]$$

und darum

$$\min_{(x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]} f(x,y) = \min_{u\in[-4,4]} \phi(u) \quad \text{und} \quad \max_{(x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]} f(x,y) = \max_{u\in[-4,4]} \phi(u).$$

Das lokale Maximum von ϕ in $u = 1$ ist nicht das globale Maximum, weil $\phi(-4) = 52 > 2 = \phi(1)$. Es Folgt, dass das globale Maximum von ϕ auf $[-4,4]$ gleich 52 ist und angenommen wird in $u = -4$. Auf gleiche Weise folgt, dass das globale Minimum von ϕ auf $[-4,4]$ gleich -52 ist und angenommen wird in $u = 4$. Darum ist das Maximum von f auf $[-2,2]$ gleich 52 und wird angenommen in $(x,y) = (\pm 2, \mp 2)$; das Minimum von f ist gleich -52 und wird angenommen in $(x,y) = (\pm 2, \pm 2)$.

Hausaufgabe 7.2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und skizzieren Sie diese.

(c) Begründen Sie, daß die Funktion f ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

(d) Skizzieren Sie qualitativ die Niveaulinien der Funktion f.

Lösung:

(a) Es gilt

$$Df(x,y) = \big((y - x^2y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, (x - xy^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Die kritische Punkte sind damit gegeben durch die Gleichungen

$$(y - x^2y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0 \quad \text{und} \quad (x - xy^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0.$$

und damit is die Menge C der kritische Punkte gleich

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ und } x = 0, \text{ oder } x^2 = y^2 = 1\} \\ &= \{(0,0), (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}. \end{aligned}$$

Die Hessesche von f wird für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} (-3xy + x^3y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & (1 - y^2 - x^2 + x^2y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ (1 - x^2 - y^2 + x^2y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & (-3xy + xy^3)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

- $\mathrm{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerten sind gleich 1 und -1. In (0,0) liegt darum ein Sattelpunkt vor.
- $\mathrm{Hess}f(\pm1,\pm1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$. Es gibt eine doppelte Eigenwert $-2e^{-1}$. In $(\pm1,\pm1)$ liegen darum lokale Maxima vor.
- $\mathrm{Hess}f(\pm1,\mp1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$. Es gibt eine doppelte Eigenwert $2e^{-1}$. In $(\pm1,\mp1)$ liegen darum lokale Minima vor.

(b) Die Nullstellen von f sind gegeben durch die Gleichung $xy = 0$. Die Menge der Nulstellen ist damit die Vereinigung der Geraden $\mathbb{R} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}$.

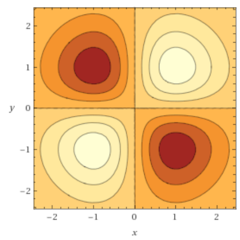
(c) Für jede $\epsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$, sodass $|f(x,y)| < \epsilon$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\| > R$. Es folgt, dass für hinreichend grosse $R > 0$ die Funktion f sein Minimum und Maximum auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)| \leq R\}$ annimt. Dies impliziert, dass das Minimum und Maximum in einem kritischen Punkt angenommen wird. Das Minimum is deshalb gleich

$$f(1,-1) = f(-1,1) = -e^{-1}$$

und wird angenommen in die Punkte $(1,-1)$ und $(-1,1)$. Das Maximum ist gleich

$$f(1,1) = f(-1,-1) = e^{-1}$$

und wird angenommen in die Punkte $(1,1)$ und $(-1,-1)$.

(d) 

Hausaufgabe 7.3 Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{x^2y}$$

im Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Lösung: Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \big(\pi\cos(\pi x) + 2xy\sin(\pi x)\big)\cos(\pi y)e^{x^2 y} \\
\partial_y f(x,y) &= \big(-\pi\sin(\pi y) + x^2\cos(\pi y)\big)\sin(\pi x)e^{x^2 y} \\
\partial_x^2 f(x,y) &= \Big(\big(4x^2y^2 + 2y - \pi^2\big)\sin(\pi x) + 4\pi xy\cos(\pi x)\Big)\cos(\pi y)e^{x^2 y} \\
\partial_y^2 f(x,y) &= \Big(\big(x^4 - \pi^2\big)\cos(\pi y) - 2\pi x^2\sin(\pi y)\Big)\sin(\pi x)e^{x^2 y} \\
\partial_x\partial_y f(x,y) &= \partial_y\partial_x f(x,y) \\
&= \bigg(\Big(-\pi^2\cos(\pi x) - 2\pi xy\sin(\pi x)\Big)\sin(\pi y) + \Big((2x + 2x^3y)\sin(\pi x) + \pi x^2\cos(\pi x)\Big)\cos(\pi y)\bigg)e^{x^2 y}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 0 \\
\partial_x f(1,1) &= \pi e \\
\partial_y f(1,1) &= 0 \\
\partial_x^2 f(1,1) &= 4\pi e \\
\partial_y^2(1,1) &= 0 \\
\partial_x\partial_y f(1,1) &= \partial_y\partial_x f(1,1) = \pi e.
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f ist darum

$$\pi e(x-1) + 2\pi e(x-1)^2 + \pi e(x-1)(y-1).$$