Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto xy - x^2 - y^2 - 2x + 4.$$

(a) Berechnen Sie Df und die kritischen Punkte von f.

(b) Berechnen Sie die Hessesche von f.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Hesseschen in jedem kritischen Punkt.

(d) Untersuchen Sie, ob an diesen kritischen Punkten lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

Lösung:

(a)
$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2x - 2 & x - 2y \end{pmatrix} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Die kritische Punkte von f sind die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$y - 2x - 2 = x - 2y = 0.$$

Das einzige kritische Punkt is darum $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

(b) Die Hessesche wird gegeben durch

$$A := \mathrm{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(c) Die Eigenwerten von A sind die $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 2)^2 - 1$ gleich 0 ist. Die Eigenwerten sind darum -1 und -3. Die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind die Lösungen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ der Gleichung $Av = -v$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert -1 is darum gleich

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}.$$

Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert -3 ist gleich

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}.$$

(d) Die beide Eigenwerten der Hessesche in dem kritische Punkt $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ sind negativ. Es folgt, das hier eine lokales Maximum vorliegt.

Präsenzaufgabe 7.2 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} - (-2)\det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & \lambda-1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1)\big((\lambda-1)^2-4\big) + 2\big(-2(\lambda-1)+2\big) + \big(4-(\lambda-1)\big) \\
&= (\lambda-1)^3 - 9(\lambda-1) + 8
\end{aligned}$$

Damit ist das Charakteristische Polynom von A gleich

$$(\lambda-1)^3 - 9(\lambda) + 8 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 16 = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-8).$$

(b) Die Eigenwerten sind die Lösungen von $(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-8) = 0$ und damit gegeben durch $\lambda = 2, \frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

(c) Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$ sind die nicht-triviale Lösungen v von $(2I_3 - A)v = 0$. Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2 ist damit gleich

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}.$$

Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ ist

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}.$$

und die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\frac{1-\sqrt{33}}{2}$ ist

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \setminus \{0\}.$$

Präsenzaufgabe 7.3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x-y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von $f$und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und skizzieren Sie diese.

(d) Begründen Sie, daß die Funktion f ihr Maximum und Minimum auf $[-3,\infty)\times\mathbb{R}$ annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

Es gab ein Fehler in Aufgabe (d): f ist nicht beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= (2x - x^2 + y^2)e^{-x-y^2} \\
\partial_y f(x,y) &= (-2y - 2x^2y + 2y^3)e^{-x-y^2} \\
\partial_x^2 f(x,y) &= (2 - 4x + x^2 - y^2)e^{-x-y^2} \\
\partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) &= (-4xy + 2y + 2x^2y - 2y^3)e^{-x-y^2} \\
\partial_y^2 f(x,y) &= (-2 - 2x^2 + 10y^2 + 4x^2y^2 - 4y^4)e^{-x-y^2}
\end{aligned}$$

und darum

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= 0 \\
\partial_x f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= e^{-\frac{3}{4}} \\
\partial_y f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= -e^{-\frac{3}{4}} \\
\partial_x^2 f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= 0 \\
\partial_x\partial_y f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \partial_y\partial_x f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0 \\
\partial_y^2 f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= 0
\end{aligned}$$

Darum gilt $D^2 f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0$ und damit ist das Taylorpolynom zweiter Ordnung in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ gleich

$$e^{-\frac{3}{4}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - e^{-\frac{3}{4}}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

(b) Die kritische Punkte von f sind die Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, sodass $Df(x,y) = 0$, dass heißt

$$(2x - x^2 + y^2)e^{-x-y^2} = 0, \quad (-2y - 2x^2y + 2y^3)e^{-x-y^2} = 0.$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$2x - x^2 + y^2 = 0, \quad y(-1 - x^2 + y^2) = 0.$$

Die zweite Gleichung impliziert, dass $y = 0$ oder $-x^2 + y^2 = 1$. Wenn $y = 0$, dann gilt nach der erste Gleichung $x^2 = 2x$ und damit $x = 0$ oder $x = 2$. Wenn $-x^2 + y^2 = 1$, dann gilt nach der erste Gleichung $-2x = 1$ und damit $x = -\frac{1}{2}$ und $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Es gibt also 4 kritische Punkte:

$$(0,0), (2,0), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}).$$

Die Hessesche von f ist gegeben durch

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 - 4x + x^2 - y^2)e^{-x-y^2} & (-4xy + 2y + 2x^2y - 2y^3)e^{-x-y^2} \\ (-4xy + 2y + 2x^2y - 2y^3)e^{-x-y^2} & (-2 - 2x^2 + 10y^2 + 4x^2y^2 - 4y^4)e^{-x-y^2} \end{pmatrix},$$

wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess} f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Hess} f(2,0) &= \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -10e^{-2} \end{pmatrix} \\
\mathrm{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 3e^{-\frac{3}{4}} & -\sqrt{5}e^{-\frac{3}{4}} \\ -\sqrt{5}e^{-\frac{3}{4}} & 5e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix} \\
\mathrm{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 3e^{-\frac{3}{4}} & \sqrt{5}e^{-\frac{3}{4}} \\ \sqrt{5}e^{-\frac{3}{4}} & 5e^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Die Eigenwerte von $\mathrm{Hess} f(0,0)$ sind 2 und -2. Es handelt sich darum in $(0,0)$ um ein Sattelpunkt.
- Die Eigenwerte von $\mathrm{Hess} f(2,0)$ sind $2e^{-2}$ und $-10e^{-2}$. Es handelt sich darum in $(2,0)$ um ein Sattelpunkt.
- Die Eigenwerte von $\mathrm{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ sind $(4 \pm \sqrt{6})e^{-\frac{3}{4}}$. Es handelt sich darum in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ um ein lokales Minimum.
- Die Eigenwerte von $\mathrm{Hess} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ sind auch $(4 \pm \sqrt{6})e^{-\frac{3}{4}}$. Es handelt sich darum in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ auch um ein lokales Minimum.

(c) Die Nullstellen von f sind die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 = y^2$, also die Vereinigung der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) Wenn $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-3, \infty)$ ist, sodass $\big(\|(x_n, y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0.$$

Es folgt, dass f ihr Maximum und Minimum auf $[-3, \infty)$ annimmt. Das Minimum von $f\big|_{[-3,\infty)}$ wird darum angenommen auf $C_- \cap [-3, \infty)$. Auf die Gerade $\{(-3, y) : y \in \mathbb{R}\}$ gilt

$$\partial_y f(-3, y) = (-20y + 2y^3)e^{-3-y^2}$$

Es gilt $\partial_y f(-3, y) = 0$ genau dann, wenn $y = 0$ oder $y = \pm\sqrt{20}$. Die Funktion f nimmt ihr Minimum und Maximum an ein lokales Extremum von f oder an ein lokales Extremum von $y \mapsto f(-3, y)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= -e^{-\frac{3}{4}} \\
f(-3, 0) &= 9e^3 \\
f\big(-3, \pm\sqrt{20}\big) &= -11e^{-17}.
\end{aligned}$$

Das Maximum ist damit $9e^3$ und wird anngenommen in $(-3, 0)$. Das Minimum ist $-e^{-\frac{3}{4}}$ und wird angenommen in $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.