Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(V)$ eine C^1-Abbildung mit $\gamma(0) = \mathrm{id}_V$ und

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s) \qquad (s, t \in \mathbb{R}) \,. \tag{1}$$

Wir definieren

$$X := \gamma'(0) \in \mathrm{End}(V)\,.$$

(a) Beweisen Sie, dass γ die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = X \circ \gamma(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

erfüllt. Folgern Sie, dass γ glatt ist.

(b) Beweisen Sie die Identität

$$\gamma(t) = e^{tX} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $t \mapsto e^{-tX}\gamma(t)$ konstant ist.

Sogar eine stärkere Aussage ist wahr: Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(V)$ eine Abbildung, sodass (1) erfüllt ist. Wenn γ stetig ist (statt C^1), dann ist γ glatt. Insbesondere gibt es ein $X \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\gamma(t) = e^{tX}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sehen Sie *Very basic Lie Theory* von Roger Howe.

Präsenzaufgabe 8.2 Betrachten Sie die Matrixexponentialfunktion

$$\exp : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto e^X.$$

(a) Beweisen Sie die Identität

$$D\exp(0)X = X \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Folgern Sie, dass es eine Umgebung U von 0 in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt, so dass $V := \exp(U)$ eine offene Umgebung von I_n und $\exp\big|_U : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie $D\exp(A)$ für $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dazu vor wie folgt.

(i) Für $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$, sei

$$L_B : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}); \quad X \mapsto BX,$$
$$R_B : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}); \quad X \mapsto XB.$$

Berechnen sie DL_B und DR_B.

(ii) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$F_X(s) := \big(DL_{\exp(sA)}(I_n)\big)^{-1} \circ D\exp(sA)(sX)\big(s \in \mathbb{R}^n\big).$$

Beweisen Sie die Identität

$$F_X(s) = \frac{d}{dt}\exp(-sA)\exp(sA + stX)\big|_{t=0} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

(iii) Zeigen Sie

$$\exp\big(-(s+\sigma)A\big)\exp\big((s+\sigma)(A+tX)\big)$$

$$= \exp\big(-sA\big)\exp\big(-\sigma A\big)\exp\big(\sigma(A+tX)\big)\exp\big(s(A+tX)\big)$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}F_X(s)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{d\sigma}\exp\big(-sA\big)\exp\big(-\sigma A\big)\exp\big(\sigma(A+tX)\big)\exp\big(s(A+tX)\big)\big|_{\sigma=0}\big|_{t=0}\\
&= -\frac{d}{dt}\Big(\exp\big(-sA\big)A\exp\big(s(A+tX)\big) + \exp\big(-sA\big)(A+tX)\exp\big(s(A+tX)\big)\Big)\Big|_{t=0}\\
&= \exp\big(-sA\big)X\exp\big(sA\big).
\end{aligned}$$

(iv) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\big(\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ gegeben durch

$$\gamma(s)X = \exp\big(-sA\big)X\exp\big(sA\big) \qquad \big(s \in \mathbb{R}, X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

die Identität (1) in Präsenzaufgabe 8.1 erfüllt. Wir definieren

$$\mathrm{ad}(A)Y := AY - YA \qquad \big(Y \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\gamma'(0) = -\mathrm{ad}(A).$$

Folgern Sie, dass

$$\frac{d}{ds}F_X(s) = e^{-s\,\mathrm{ad}(A)}(X) \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

(v) Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, F_X(1)w\rangle = \int_0^1 \langle v, \Big(e^{-s\,\mathrm{ad}(A)}(X)\Big)w\rangle\, ds = \Big\langle v, \Big(\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)} - I}{\mathrm{ad}(A)}(X)\Big)w\Big\rangle,$$

wobei $\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)}-I}{\mathrm{ad}(A)} \in \mathrm{End}\big(\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ definiert ist durch die konvergente Potenzreihe

$$\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)} - I}{\mathrm{ad}(A)} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\mathrm{ad}(A)^k.$$

Folgern Sie, dass für alle $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$D\exp(A)(X) = e^A\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)} - I}{\mathrm{ad}(A)}(X).$$

Präsenzaufgabe 8.3 Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Nehmen Sie an, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Eigenwert und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, das heißt

$$Av = \lambda v.$$

Nehmen Sie weiter an, dass $\|v\| = 1$ und das λ ein einfacher Eigenwert ist, das heißt, λ ist eine einfache Nullstelle von dem charakteristischen Polynom von A. Beweisen Sie, dass es eine offene Umgebung U von A in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ gibt samt C^1-Abbildungen

$$E : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \Lambda : U \to \mathbb{R},$$

sodass

$$E(A) = v \quad \text{und} \quad \Lambda(A) = \lambda$$

und für alle $B \in U$

$$BE(B) = \Lambda(B)E(B) \quad \text{und} \quad \|E(B)\| = 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (x, \mu) \mapsto \big(Ax - \mu x, \|x\|^2 - 1\big).$$

aus Hausaufgabe 5.2. Benützen Sie das Ergebnis von Hausaufgabe 5.2 um zu zeigen, dass

$$\det Df(v, \lambda) \neq 0.$$

Wenden Sie jetzt den Satz über impliziten Funktionen auf die Abbildung

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (B, x, \mu) \mapsto \big(Bx - \mu x, \|x\|^2 - 1\big)$$

an.

Präsenzaufgabe 8.4

(a) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 = 1\}$ für feste Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermanigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Ist der Lichtkegel $C = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = t^2\}$ eine Untermannigfaltigkeit?

Hausaufgabe 8.1 Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : g^t = g^{-1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{O}(n)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_{n\times n}(\mathbb{R}); \qquad g \mapsto g^t g$$

mit $\mathrm{Sym}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) : X^t = X\}$ dem Vektorraum der symmetrischen Matrizen.

Hausaufgabe 8.2 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen sie e^{tA}, e^{tB} und e^{tC} für $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Präsenzaufgabe 7.2.

Hausaufgabe 8.3 Sei $V := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < 1\}$. Betrachten Sie für $x \in V$ die *Kepler-Gleichung*

$$y = x_1 + x_2 \sin(y)$$

für eine Unbekannte $y \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass es für jedes $x \in V$ eine eindeutige Lösung der Kepler-Gleichung $y = \psi(x)$ gibt, welche differenzierbar von x abhängt.
Hinweis: Betrachten Sie

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x_1 + x_2 \sin(y) - y$$

und verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass $\psi(\pi, x_2) = \pi$ für alle $x_2 \in (-1,1)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi(x_1 + 2\pi, x_2) = \psi(x) + 2\pi$ für alle $x \in V$.

(d) Zeigen Sie, dass $\psi(-x_1, x_2) = -\psi(x)$ für alle $x \in V$. Folgern Sie

$$\partial_{x_1}^k \psi(x_1,x_2)\big|_{x_1=0} = 0$$

für alle $k \in 2\mathbb{N}_0$ und $x_2 \in (-1,1)$.

(e) Beweisen Sie, dass

$$D\psi(x) = \left(\frac{1}{1 - x_2 \cos\big(\psi(x)\big)}, \frac{\sin\big(\psi(x)\big)}{1 - x_2 \cos\big(\psi(x)\big)} \right) \qquad (x \in V).$$

Die Gleichung von Kepler spielt eine Rolle in der Beschreibung der Orbiten von Himmelskörpern. Sehen Sie *Wikipedia*.

Abgabetermin der Hausaufgaben: Montag, 15. Juni 2020, 9 Uhr via Panda.