Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

8. Übungsblatt

Hausaufgabe 8.1 Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : g^t = g^{-1}\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{O}(n)$.

Lösung: Wir definieren

$$f : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_{n\times n}(\mathbb{R}); \qquad g \mapsto g^t g,$$

wobei $\mathrm{Sym}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) : X^t = X\}$ dem Vektorraum der symmetrischen Matrizen ist. Es gilt

$$Df(g)(X) = X^t g + g^t X \qquad \big(g, X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Wenn $f(g) = 1$, dann

$$\det(g)^2 = \det(g^t)\det(g) = \det\big(f(g)\big) = \det(I_n) = 1.$$

Es folgt, dass $\det(g) = \pm 1$ und damit, dass g invertierbar ist. Wenn $Y \in \mathrm{Sym}_{n,n}(\mathbb{R})$ und $X = \frac{1}{2}(g^t)^{-1}Y$, dann

$$Df(g)(X) = X^t g + g^t X = \frac{1}{2}\big((g^t)^{-1}Y\big)^t g + \frac{1}{2} g^t (g^t)^{-1} Y = \frac{1}{2}Y^t + \frac{1}{2}Y = Y.$$

Es folgt, dass $Df(g)$ surjektiv ist für jede $g \in f^{-1}(\{I_n\})$. Nach dem Satz vom regulärem Wert ist $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\{I_n\})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ von Dimension

$$\dim\big(\mathrm{O}(n)\big) = \dim(\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big) - \dim\big(\mathrm{Sym}_{n,n}(\mathbb{R})\big) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Hausaufgabe 8.2 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen sie e^{tA}, e^{tB} und e^{tC} für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Nach Präsenzaufgabe 7.2 sind die Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 2, $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{33}}{2}$. Diese Vektoren bilden eine orthonormale Basis. Sei

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} & \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} \\ 0 & \frac{1+\sqrt{33}}{\sqrt{2(33+\sqrt{33})}} & \frac{1-\sqrt{33}}{\sqrt{2(33-\sqrt{33})}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} & \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} \end{pmatrix}$$

Die die Spalten eine orthonormale Basis bilden, ist C eine orthogonale Matrix, das heißt $C^t = C^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} & e^{tA} \\ &= C \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(\frac{1+\sqrt{33}}{4})} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(\frac{1-\sqrt{33}}{4})} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} & \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} \\ 0 & \frac{1+\sqrt{33}}{\sqrt{2(33+\sqrt{33})}} & \frac{1-\sqrt{33}}{\sqrt{2(33-\sqrt{33})}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} & \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(\frac{1+\sqrt{33}}{4})} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(\frac{1-\sqrt{33}}{4})} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} & \frac{1+\sqrt{33}}{\sqrt{2(33+\sqrt{33})}} & \sqrt{\frac{8}{33+\sqrt{33}}} \\ \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} & \frac{1-\sqrt{33}}{\sqrt{2(33-\sqrt{33})}} & \sqrt{\frac{8}{33-\sqrt{33}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Es gilt $B^2 = -I_n$ and darum

$$\begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} (-1)^k I_2 \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k B \right) \\ &= \cos(t) I_2 + \sin(t) B \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Es gilt $C^2 = 0$ und darum

$$e^{tC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C^k = I_2 + tC = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 8.3 Sei $V := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < 1\}$. Betrachten Sie für $x \in V$ die *Kepler-Gleichung*

$$y = x_1 + x_2 \sin(y)$$

für eine Unbekannte $y \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass es für jedes $x \in V$ eine eindeutige Lösung der Kepler-Gleichung $y = \psi(x)$ gibt, welche differenzierbar von x abhängt.

(b) Zeigen Sie, dass $\psi(\pi, x_2) = \pi$ für alle $x_2 \in (-1, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi(x_1 + 2\pi, x_2) = \psi(x) + 2\pi$ für alle $x \in V$.

(d) Zeigen Sie, dass $\psi(-x_1, x_2) = -\psi(x)$ für alle $x \in V$. Folgern Sie

$$\partial_{x_1}^k \psi(x_1, x_2)\big|_{x_1=0} = 0$$

für alle $k \in 2\mathbb{N}_0$ und $x_2 \in (-1, 1)$.

(e) Beweisen Sie, dass

$$D\psi(x) = \left(\frac{1}{1 - x_2 \cos\big(\psi(x)\big)}, \frac{\sin\big(\psi(x)\big)}{1 - x_2 \cos\big(\psi(x)\big)}\right) \qquad (x \in V).$$

Lösung:

(a) Sei $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \in V$ gegeben durch

$$f_x(y) = x_1 + x_2 \sin(y) - y \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Die Funktion f ist stetig und es gilt

$$\lim_{y \to \pm\infty} f_x(y) = \mp\infty.$$

Es folgt mit Hilfe der Zwischenwertsatz, dass f_x surjektiv ist. Da $f_x'(y) = x_2 \cos(y) - 1$ und $|x_2| < 1$, gilt $f_x'(y) < 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit ist f_x strikt monoton fallend und darum injektiv. Es folgt, dass es für jede $x \in V$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f_x(y) = 0$. Sei $\psi : V \to \mathbb{R}$ die Abbildung, sodass

$$f_x(\psi(x)) = 0 \qquad (x \in V).$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass es für jede $x \in V$ eine Umgebung U von x in V gibt, sodass $\psi\big|_U$ stetig differenzierbar ist. Weil dies gilt für alle $x \in V$, ist ψ eine C^1-Funktion.

(b) Sei $x_2 \in (-1, 1)$. Es gilt

$$\pi + x_2 \sin(\pi) - \pi = 0$$

und damit

$$\psi(\pi, x_2) = \pi.$$

(c) Sei $x \in V$. Wenn

$$x_1 + x_2 \sin(y) - y = 0,$$

dann

$$x_1 + 2\pi + x_2 \sin(y + 2\pi) - (y + 2\pi) = 0$$

und darum gilt $\psi(x_1 + 2\pi, x_2) = \psi(x) + 2\pi$.

(d) Wenn $x \in V$ und

$$x_1 + x_2 \sin(y) - y = 0,$$

dann

$$-x_1 + x_2 \sin(-y) - (-y) = 0$$

und darum gilt $\psi(-x_1, x_2) = -\psi(x)$. Aus die C^k-Version des Satzes über impliziete Funktionen folgt, dass ψ sogar glatt ist. Da ψ ungerade ist in x_1 gilt

$$-\partial_{x_1}^k \psi(0, x_2) = \partial_{x_1}^k \psi(-x_1, x_2)\big|_{x_1=0} = (-1)^k \partial_{x_1}^k \psi(0, x_2) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

Wenn k gerade ist, dann $\partial_{x_1}^k \psi(0, x_2) = 0$.

(e) Nach dem Satz über impliziete Funktionen gilt

$$\begin{aligned} D\psi(x) &= -\frac{1}{f_x'(\psi(x))}\Big(\partial_{x_1}\big(x_1 + x_2\sin(y) - y\big)\big|_{y=\psi(x)}, \partial_{x_2}\big(x_1 + x_2\sin(y) - y\big)\big|_{y=\psi(x)}\Big) \\ &= -\frac{1}{x_2\cos\big(\psi(x)\big) - 1}\Big(1, \sin\big(\psi(x)\big)\Big). \end{aligned}$$