Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(V)$ eine C^1-Abbildung mit $\gamma(0) = \mathrm{id}_V$ und

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s) \qquad (s, t \in \mathbb{R}) \ . \tag{1}$$

Wir definieren

$$X := \gamma'(0) \in \mathrm{End}(V) \, .$$

(a) Beweisen Sie, dass γ die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = X \circ \gamma(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

erfüllt. Folgern Sie, dass γ glatt ist.

(b) Beweisen Sie die Identität

$$\gamma(t) = e^{tX} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Lösung:

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\gamma'(t) = \frac{d}{ds}\gamma(t+s)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\gamma(s)\big|_{s=0}\gamma(t) = X\gamma(t).$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $t \mapsto X^k\gamma(t)$ eine C^1-Abbildung und

$$\frac{d}{dt}X^k\gamma(t) = X^k\gamma'(t) = X^{k+1}\gamma(t).$$

Es folgt jetzt mit Induktion, dass γ unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Weil $\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(V)$, $t \mapsto \exp(tX)$ eine C^1-Abbildung ist und für $s, t \in \mathbb{R}$ die Bedingung $\delta(s+t) = \delta(s)\delta(t)$ erfüllt, gilt

$$\frac{d}{dt}\exp(tX) = X\exp(tX)$$

Weiter gilt

$$X\exp(tX) = \exp(tX)X$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(-tX)\gamma(t) &= \big(\frac{d}{dt}\exp(-tX)\big)\gamma(t) + \exp(-tX)\big(\frac{d}{dt}\gamma(t)\big)\\ &= -X\exp(tX)\gamma(t) + \exp(tX)X\gamma(t)\\ &= -X\exp(tX)\gamma(t) + X\exp(tX)\gamma(t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Es folgt, dass $t \mapsto \exp(-tX)\gamma(t)$ konstant ist und darum gilt $\gamma(t) = \exp(tX)\exp(0)\gamma(0) = \exp(tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 8.2 Betrachten Sie die Matrixexponentialfunktion

$$\exp : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto e^X.$$

(a) Beweisen Sie die Identität

$$D\exp(0)X = X \qquad \big(X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Folgern Sie, dass es eine Umgebung U von 0 in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt, so dass $V := \exp(U)$ eine offene Umgebung von I_n und $\exp\big|_U : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie $D\exp(A)$ für $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dazu vor wie folgt.

Lösung:

(a) Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Nach Präsenzaufgabe 8.1 gilt

$$D\exp(0)X = \frac{d}{dt}\exp(tX)\Big|_{t=0} = X\exp(0) = 0.$$

Damit ist $D\exp(0)$ die Identitätsabbildung auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $D\exp(0)$ invertierbar. Nach dem Satz"über die Umkehrfunktion gibt es eine offene Umgebung U von 0 und eine offene Umgebung V von $I_n = \exp(0)$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass die Einschränkung von exp auf U ein C^1-Diffeomorphismus $U \to V$ ist.

(b) Wenn $\gamma, \delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar sind, dann gibt es eine Art Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\delta(t) = \gamma'(t)\delta(t) + \gamma(t)\delta'(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere gilt für $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)B = \gamma'(t)B \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}B\gamma(t) = B\gamma'(t).$$

Wir werden diese Identiäten mehrmals verwenden.

Sei $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$F_X(s) := \exp(-sA)D\exp(sA)(sX) = \frac{d}{dt}\exp(-sA)\exp(sA + tsX)\Big|_{t=0}.$$

Wenn $s, \sigma \in \mathbb{R}$, dann

$$\exp\big(-(s+\sigma)A\big)\exp\big((s+\sigma)(A+tX)\big)$$

$$= \exp\big(-sA\big)\exp\big(-\sigma A\big)\exp\big(\sigma(A+tX)\big)\exp\big(s(A+tX)\big)$$

und darum

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F_X(s) &= \frac{d}{d\sigma}F_X(s+\sigma)\Big|_{\sigma=0} \\ &= \frac{d}{d\sigma}\frac{d}{dt}\exp\big(-sA\big)\exp\big(-\sigma A\big)\exp\big(\sigma(A+tX)\big)\exp\big(s(A+tX)\big)\Big|_{t=0}\Big|_{\sigma=0}.\end{aligned}$$

Weil alle Abbildungen in diese Formel glatt sind, dürven wir nach dem Satz von Schwarz die beide Ableitungen verwechseln. Wir bekommen dann

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}F_X(s)\\
&\quad= \frac{d}{dt}\frac{d}{d\sigma}\exp\big(-sA\big)\exp\big(-\sigma A\big)\exp\big(\sigma(A+tX)\big)\exp\big(s(A+tX)\big)\big|_{\sigma=0}\big|_{t=0}\\
&\quad= \frac{d}{dt}-\exp\big(-sA\big)A\exp\exp\big(s(A+tX)\big)\big|_{t=0}+\exp\big(-sA\big)(A+tX)\exp\big(s(A+tX)\big)\big|_{t=0}\\
&\quad= \frac{d}{dt}t\exp\big(-sA\big)X\exp\big(s(A+tX)\big)\big|_{t=0}\\
&\quad= \exp\big(-sA\big)X\exp\big(s(A+tX)\big)+ts\exp\big(-sA\big)XD\exp(sA)X\big|_{t=0}\\
&\quad= \exp\big(-sA\big)X\exp\big(sA\big).
\end{aligned}
$$

Sei $\gamma:\mathbb{R}\to\mathrm{End}\big(\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ gegeben durch

$$\gamma(s)X=\exp\big(-sA\big)X\exp\big(sA\big)\qquad\big(s\in\mathbb{R},X\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Es gilt

$$\gamma(0)X=\exp(0)X\exp(0)=X\qquad\big(X\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

und

$$
\begin{aligned}
\gamma(s+t)X&=\exp\big(-(s+t)A\big)X\exp\big((s+t)A\big)\\
&=\exp(-sA)\exp(-tA)X\exp(tA)\exp(sA)\\
&=\gamma(s)\big(\gamma(t)X\big).
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)X\big|_{t=0}=-AX+XA.\qquad\big(X\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big).$$

Wir definieren

$$\mathrm{ad}(A):\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\to\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}),\quad Y\mapsto AY-YA.$$

Das Ergebnis aus Präsenzaufgabe 8.1 zeigt, dass für alle $t\in\mathbb{R}$

$$\gamma(t)=e^{-t\,\mathrm{ad}(A)}.$$

Es folgt,

$$\frac{d}{ds}F_X(s)=e^{-s\,\mathrm{ad}(A)}(X)\qquad(s\in\mathbb{R}).$$

Seien jetzt $v,w\in\mathbb{R}^n$. Dann ist $s\mapsto\langle v,F_X(s)w\rangle$ eine glatte Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und

$$\frac{d}{ds}\langle v,F_X(s)w\rangle=\Big\langle v,\big(\frac{d}{ds}F_X(s)\big)w\Big\rangle=\Big\langle v,e^{-s\,\mathrm{ad}(A)}(X)w\Big\rangle\qquad(s\in\mathbb{R}).$$

Da

$$F_X(0)=\frac{d}{dt}I_n\Big|_{t=0}=0$$

folgt

$$\begin{aligned}
\langle v, F_X(1)w\rangle &= \int_0^1 \langle v, \Big(e^{-s\,\mathrm{ad}(A)}(X)\Big)w\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} \left\langle v, \mathrm{ad}(A)^k(X)w\right\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!}\, ds \left\langle v, \mathrm{ad}(A)^k(X)w\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1!} \left\langle v, \mathrm{ad}(A)^k(X)w\right\rangle.
\end{aligned}$$

Sei $\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)}-I}{\mathrm{ad}(A)} \in \mathrm{End}\big(\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ definiert durch die konvergente Potenzreihe

$$\frac{e^{-\mathrm{ad}(A)}-I}{\mathrm{ad}(A)} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\mathrm{ad}(A)^k.$$

Dann gilt

$$\langle v, F_X(1)w\rangle = \left\langle v, \frac{e^{-\mathrm{ad}(A)}-I}{\mathrm{ad}(A)}(X)w\right\rangle.$$

Wir haben jetzt bewiesen, dass für alle $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$D\exp(A)(X) = e^A F_X(1) = e^A \frac{e^{-\mathrm{ad}(A)}-I}{\mathrm{ad}(A)}(X).$$

Präsenzaufgabe 8.3 Sei $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Nehmen Sie an, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Eigenwert und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, das heißt

$$Av = \lambda v.$$

Nehmen Sie weiter an, dass $\|v\| = 1$ und das λ ein einfacher Eigenwert ist, das heißt, λ ist eine einfache Nullstelle von dem charakteristischen Polynom von A. Beweisen Sie, dass es eine offene Umgebung U von A in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ gibt samt C^1-Abbildungen

$$E : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \Lambda : U \to \mathbb{R},$$

sodass

$$E(A) = v \quad \text{und} \quad \Lambda(A) = \lambda$$

und für alle $B \in U$

$$BE(B) = \Lambda(B)E(B) \quad \text{und} \quad \|E(B)\| = 1. \tag{2}$$

Lösung: Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (x, \mu) \mapsto \big(Ax - \mu x, \|x\|^2 - 1\big).$$

Nach Hausaufgabe 5.2 gilt

$$Df(v, \lambda) = \lim_{\mu \to \lambda} 2\frac{\det(A - \mu I_n)}{\lambda - \mu}.$$

Weil λ ein einfacher Eigenwert ist, ist die Limes ungleich 0. Sei

$$\Phi : \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \qquad (B, x, \mu) \mapsto \big(Bx - \mu x, \|x\|^2 - 1\big)$$

Dann ist Φ eine C^1-Abbildung und gilt $D_{(x,\mu)}\Phi = Df$. Es folgt, dass

$$\det D_{(x,\mu)}\Phi(A, v, \lambda) = \det Df(v, \lambda) \neq 0.$$

Nach den Satz über impliziten Funktionen gibt es eine offene Umgebung U von A in $\operatorname{End}(V)$ und eine C^1-Abbildung $\psi : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sodass

$$\Phi\big(B, \psi(B)\big) = 0 \qquad (B \in U).$$

Seien $E : U \to \mathbb{R}^n$ und $\Lambda : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi(B) = \big(E(B), \Lambda(B)\big) \qquad \big(B \in \operatorname{End}(V)\big).$$

Die Abbildungen E und Λ sind C^1 und erfüllen die Gleichungen (2).

Präsenzaufgabe 8.4

(a) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 = 1\}$ für feste Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermanigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Ist der Lichtkegel $C = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = t^2\}$ eine Untermannigfaltigkeit?

Lösung:

(a) Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right)^2.$$

Die Abbildung f ist glatt und die Ableitung

$$Df(x) = \left(2\frac{x_1}{\lambda_1^2}, \ldots, 2\frac{x_1}{\lambda_1^2}\right)$$

ist eine surjektive Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann wenn $x \neq 0$. Da $0 \notin f^{-1}(\{1\})$, ist 1 eine reguläre Wert von f. Nach dem Satz vom regulärem Wert ist $M = f^{-1}(\{1\}$ eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(b) Nein; sehen Sie Arbeitsblatt 9.