Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1

(a) Beweisen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Präsenzaufgabe 9.2

(a) Welche der Teilmengen

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$,
(ii) $\{(x, |x|) :\in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$,
(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$.

sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$?

(b) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & (x < 0) \\ 0, & (x = 0) \\ e^{-\frac{1}{x}}, & (x > 0) \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(f(x), |f(x)|\big)$ eine glatte Kurve, aber $\mathrm{Im}(\gamma)$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Präsenzaufgabe 9.3 Bestimmen Sie den Tangential- und Normalenraum von

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

an einem Punkt $x \in S^n$.

Präsenzaufgabe 9.4 Sei $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

(a) Sei $r > 0$. Wir definieren

$$\Phi_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto \Phi(r, \phi, \theta).$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}\big(\Phi_r\big) = S^2(r) := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = r\}$.

(b) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $v \in S^2(r) \setminus \{(0, 0, \pm r)^t\}$ eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass $V := \Phi(U)$ eine offene Umgebung von v und $\Phi\big|_U : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det D\Phi$.

Präsenzaufgabe 9.5 Beweisen Sie für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.
2. M ist lokal Urbild eines regulären Wertes, i.e. für alle $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^1-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit
   - $f(p) = 0$,
   - $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$,
   - f ist *submersiv*, d.h. $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ist surjektiv für alle $x \in U$.

Präsenzaufgabe 9.6 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, Ax \rangle.$$

Da $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ kompakt ist, gibt es ein $x_1 \in S^{n-1}$, sodass

$$\sup_{y \in S^{n-1}} f(y) = f(x_1).$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren, dass x_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $f(x_1)$ ist.

Weil $S^{n-1} \cap x_1^\perp$ kompakt ist, gibt es ein $x_2 \in S^{n-1} \cap x_1^\perp$, sodass

$$\sup_{y \in S^{n-1} \cap x_1^\perp} f(y) = f(x_2).$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren, dass x_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $f(x_2)$ ist.

(c) Wiederholen Sie diesen Prozess und beweisen Sie auf diese Weise, dass es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus A-Eigenvektoren gibt.

Hausaufgabe 9.1 Sei Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, sodass $\Gamma \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Sei M die Drehfläche von Γ um die z-Achse, dass heißt die Fläche die durch Rotation von Γ um die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsteht. Nehmen Sie an, dass $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Karte ist von Γ, das heißt, dass γ eine injektive C^1-Kurve $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist, sodass $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\gamma^{-1} : \Gamma \to \mathbb{R}$ ist stetig und $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(\phi) \\ \gamma_1(t)\sin(\phi) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

surjektiv auf M abbildet.

(b) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge W von $\mathbb{R}^2$ gibt, sodass $x \in f(W)$ mit $Df(t, \phi)$ injektiv für alle $(t, \phi) \in W$.

(c) Sei $(t, \phi) \in \mathbb{R}^2$ und $x = f(t, \phi)$. Beweisen Sie, dass

$$\phi = 2\arctan\left(\frac{x_2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_1^2}}\right),$$

wenn $\phi \in (-\pi, \pi)$ und

$$\phi = 2\mathrm{arccot}\left(\frac{x_2}{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_1^2}}\right),$$

wenn $\phi \in (0, 2\pi)$.

(d) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Teilmenge W von $\mathbb{R}^2$ gibt, sodass die Einschränkung von f auf W injektiv und $f^{-1} : f(W) \to W$ stetig ist.

(e) Folgern Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(f) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $p = \gamma(t) \in m$. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM.

Hausaufgabe 9.2 Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, sei $\Phi_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\Phi_n(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\ldots\sin(\phi_2) \\ \vdots \\ r\cos(\phi_{n-1})\cos(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-3}) \\ r\cos(\phi_{n-1})\sin(\phi_{n-2}) \\ r\sin(\phi_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad \big((r, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}\big).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det D\Phi_n(r, \phi)$.
Hinweis: Induktion nach der Dimension n.

Hausaufgabe 9.3 Sei $M := \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : t^2 - x^2 - y^2 = 1\}$. Bestimmen Sie die Extrema von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (t, x, y) \mapsto e^{-t^2}(x + 2y)$$

auf M. Liegen in den kritischen Punkte Minima oder Maxima vor?

Abgabetermin der Hausaufgaben: Montag, 22. Juni 2020, 9 Uhr via Panda.