Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020

Analysis 2

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1

(a) Beweisen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nach Definition ist M genau dann eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jede $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ und einen C^1-Diffeomorphismus $F : U \to V$, sodass

$$F(U \cap M) = V.$$

Da F bijektiv ist, ist diese Gleichung äquivalent zu $U \cap M = U$. Es folgt, dass M genau dann eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn es für jede $x \in M$ eine offene Umgebung U von x gibt, sodass $U \subseteq M$, also genau dann, wenn M offen ist.

Präsenzaufgabe 9.2

(a) Welche der Teilmengen

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$,
(ii) $\{(x, |x|) :\in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$,
(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$.

sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$?

(b) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & (x < 0) \\ 0, & (x = 0) \\ e^{-\frac{1}{x}}, & (x > 0) \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \big(f(x), |f(x)|\big)$ eine glatte Kurve, aber $\mathrm{Im}(\gamma)$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

(a) (i) Die Wert 1 ist eine reguläre Wert von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto xy.$$

Nach der Satz vom regulärem Wert ist $f^{-1}(\{1\})$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

(ii) Wir werden beweisen, dass $M := \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Wir nehmen dazu an, dass es eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist und werden zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. Da $0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von 0 in $\mathbb{R}^2$, eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^2$ und einen C^1-Diffeomorphismus $F : U \to V$, sodass $F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $0 \in V$ und $F(0) = 0$. Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ können wir die Abbildung

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto F^{-1}(t, 0)$$

definieren. Da F einen C^1-Diffeomorphismus ist und $F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, ist γ injektiv und stetig differenzierbar und gilt $0 \in \operatorname{Im}(\gamma) \subseteq M$. Es folgt, dass γ_1 strikt monoton ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass γ_1 strikt monoton steigend ist. Es gilt $\gamma_1(t) < 0$ für $t < 0$ und $\gamma_1(t) > 0$ für $t > 0$. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt $\gamma_1' \geq 0$. Wenn $x, y \in \mathbb{R}$, dann

$$T_{(x,y)}M = \begin{cases} \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & (x < 0) \\ \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & (x > 0) \end{cases}$$

Es folgt, dass es für jede $t < 0$ ein $r \geq 0$ mit $\gamma_2'(t) = r(1, -1)^t$ und für jede $t > 0$ ein $r \geq 0$ mit $\gamma_2'(t) = r(1, 1)^t$ gibt. Da γ stetig differenzierbar ist, folgt, dass $\gamma'(0) = 0$. Weil

$$\gamma'(0) = \partial_1 F^{-1}(0) = DF^{-1}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hat $DF^{-1}(0)$ eine nicht-triviale Kern und ist damit nicht invertierbar. Dies ist im Widerspruch mit der Fakt, dass F einen C^1-Diffeomorphismus ist.

(iii) Sei $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$. Die Menge M ist die disjunkte Vereinigung von $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ und der Hyperbel $\left\{(t, \frac{1}{t}) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$. Beide sind 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$ und da die Vereinigung disjunkt ist, ist auch N eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Es folgt aus die Ergebnisse von Präsenzaufgabe 12.3, dass f glatt ist und, dass alle Ableitungen von f in 0 gleich 0 sind. Hieraus folgt, dass γ glatt ist. Nach (a-ii) ist $\operatorname{Im}(\gamma) = \{(t, |t|) : t \in \mathbb{R}\}$ aber keine C^1-Untermannigfaltigkeit.

Präsenzaufgabe 9.3 Bestimmen Sie den Tangential- und Normalenraum von

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

an einem Punkt $x \in S^n$.

Lösung: Sei

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^2$$

Es gilt

$$Df(x) = 2x^t \qquad (x \in \mathbb{R}^{n+1}).$$

Es folgt, dass 1 eine Reguläre Wert von f und $S^n = f^{-1}(\{1\})$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit ist. Die Tangentialraum an einem Punkt $x \in S^n$ wird gegeben durch

$$T_x S^n = \ker\big(Df(x)\big) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : 2x^t y = 0\} = x^\perp.$$

Die Normalenraum an dem Punkt x ist gegeben durch

$$N_x S^n = (x^\perp)^\perp = \mathbb{R}x.$$

Präsenzaufgabe 9.4 Sei $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

(a) Sei $r > 0$. Wir definieren

$$\Phi_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto \Phi(r, \phi, \theta).$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im}\big(\Phi_r\big) = S^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r\}$.

(b) Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $v \in S^2(r) \setminus \{(0, 0, \pm r)^t\}$ eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass $V := \Phi(U)$ eine offene Umgebung von v und $\Phi\big|_U : U \to V$ einen C^1-Diffeomorphismus ist.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det D\Phi$.

Lösung:

(a) Es gilt für alle $r > 0$ und $\phi, \theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\Phi(r, \phi, \theta)\|^2 &= r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta) \\ &= r^2\cos^2(\theta)\big(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\big) + r^2\sin^2(\theta) \\ &= r^2\big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\big) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Darum gilt $\operatorname{Im}(\Phi_r) \subseteq S^2(r)$. Umgekehrt, wenn $(x, y, z) \in S^2(r)$, dann gilt $(x^2 + y^2) + z^2 = r^2$. Es gibt darum ein $\theta \in \mathbb{R}$, sodass $\sqrt{x^2 + y^2} = r\cos(\theta)$ und $z = r\sin(\theta)$. Weil (x, y) jetzt ein Vector mit Länge $r\cos(\theta)$ ist, gibt es ein $\phi \in \mathbb{R}$, sodass $(x, y, z) = \Phi(r, \phi, \theta)$.

(c) Es gilt

$$D\Phi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (r > 0, \theta, \phi \in \mathbb{R})$$

und darum

$$\begin{aligned} \det D\Phi(r, \phi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \end{pmatrix} \\ &= r^2\sin^2(\phi)\sin^2(\theta)\cos(\theta) + r^2\cos^2(\phi)\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\ &\quad + r^2\cos^3(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\cos^3(\theta)\sin^2(\phi) \\ &= r^2\cos(\theta). \end{aligned}$$

(b) Sei $(x, y, z) \in S^2(r)\setminus\{(0, 0, \pm r)\}$ und seien $\phi, \theta \in \mathbb{R}$, sodass $\Phi_r(\phi, \theta) = (x, y, z)$. Bemerke, dass $\theta \notin (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi$ und darum $\det D\Phi(r, \phi, \theta) \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz gibt es eine offene Umgebung U von (r, ϕ, θ) in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2$, sodass $\Phi\big|_U : U \to V := \Phi(U)$ einen C^1-Diffeomorphismus ist. Es gilt $(x, y, z) \in V$.

Präsenzaufgabe 9.5 Beweisen Sie für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.
2. M ist lokal Urbild eines regulären Wertes, i.e. für alle $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^1-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit
   - $f(p) = 0$,
   - $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$,
   - f ist *submersiv*, d.h. $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ist surjektiv für alle $x \in U$.

Lösung: Die Implikation 2. $\Rightarrow$ 1. ist der Satz vom regulärem Wert. Wir beweisen 1. $\Rightarrow$ 2. Nehme dazu an, dass M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $p \in M$. Nach Definition gibt es eine offene Umgebung U von p, eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^n$ und einen C^1-Diffeomorphimus $F : U \to V$, sodass

$$F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $0 \in V$ und $F(p) = 0$. Sei

$$\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}, \quad (x, y) \mapsto y$$

und definiere $f := \pi \circ F$. Dann ist f eine C^1-Abbildung. Es gilt

$$\begin{aligned} f(p) &= \pi(0) = 0, \\ f^{-1}(\{0\}) &= F^{-1}\big(\pi^{-1}(\{0\})\big) = F^{-1}\big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\big) = M \cap U, \\ Df(x) &= D\pi(F(x)) \circ DF(x) = \pi \circ DF(x) \qquad (x \in U). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass $Df(x)$ surjektiv ist.

Präsenzaufgabe 9.6 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, Ax \rangle.$$

Da $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ kompakt ist, gibt es ein $x_1 \in S^{n-1}$, sodass

$$\sup_{y \in S^{n-1}} f(y) = f(x_1).$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren, dass x_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $f(x_1)$ ist.

Weil $S^{n-1} \cap x_1^\perp$ kompakt ist, gibt es ein $x_2 \in S^{n-1} \cap x_1^\perp$, sodass

$$\sup_{y \in S^{n-1} \cap x_1^\perp} f(y) = f(x_2).$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren, dass x_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $f(x_2)$ ist.

(c) Wiederholen Sie diesen Prozess und beweisen Sie auf diese Weise, dass es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus A-Eigenvektoren gibt.

Lösung:

(a) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$. Nach der Methode der Langrange'schen Multiplikatoren gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$2(Ax_1)^t - \lambda 2x_1^t = Df(x_1) - \lambda Dg(x_1) = 0$$

Es gilt $Ax_1 = \lambda x_1$. Weil $x_1 \neq 0$, ist x_1 einen Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Die wert von λ werd gegeben durch

$$\lambda = \langle x_1, \lambda x_1 \rangle = \langle x_1, Ax_1 \rangle = f(x_1).$$

(b) Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x_1, x \rangle$. Nach der Methode der Langrange'schen Multiplikatoren gibt es ein $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass

$$2(Ax_2)^t - \lambda 2 x_2^t - \mu x_1^t = Df(x_2) - \lambda Dg(x_2) - \mu Dh(x_2) = 0.$$

Es gilt

$$Ax_2 = \lambda x_2 + \frac{\mu}{2} x_1.$$

Da A symmetrisch ist und $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ gilt

$$\mu = 2\langle x_1, \lambda x_2 + \frac{\mu}{2} x_1 \rangle = 2\langle x_1, Ax_2 \rangle = 2\langle Ax_1, x_2 \rangle = 2f(x_1)\langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Es folgt, dass x_2 einen Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Die Eigenwert λ wird gegeben durch

$$\lambda = \langle x_2, \lambda x_2 \rangle = \langle x_2, Ax_2 \rangle = f(x_2).$$

(c) Wenn wir dieses Prozess n mal widerholen, dann haben wir n paarweise Zenkrechte Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in S^{n-1}$ gefunden, sodass für jede $1 \leq i \leq n$ die Vektor x_i einen Eigenvektor zum Eigenwert $f(x_i)$ ist. Diese Vektoren bilden eine Orhonormalbasis.