Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2020
2. Klausur

Analysis 2

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben mit gleicher Punktzahl und insgesamt 60 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**Summe**
15	15	15	15	60

Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Geben Sie zwei Beispiele von topologischen Räumen an für welche abgeschlossene und offene Mengen übereinstimmen. (4 P.)

(b) Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: f bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. (4 P.)

(c) Sie (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, sodaß

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y) \tag{1}$$

für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

(i) Beweisen Sie: Hat f einen Fixpunkt, so ist er eindeutig. (4 P.)

(ii) Hat jede Abbildung mit der Eigenschaft (1) einen Fixpunkt? (3 P.)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Unterraum und sei $P : \mathbb{R}^3 \to E$ die orthogonale Projektion auf E. Sei $L(\gamma)$ die Länge einer C^1-Kurve γ.

(a) Zeigen Sie, dass $L(P \circ \gamma) \leq L(\gamma)$ für alle C^1-Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. (5 P.)

(b) Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

(i) Skizzieren Sie $\gamma([0, 2\pi])$. (2 P.)

(ii) Zeigen Sie ohne zu rechnen, dass $L(\gamma) \geq 2\pi$. (2 P.)

(iii) Berechnen Sie $L(\gamma)$. (6 P.)

Aufgabe 3: (15 Punkte)
Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

und die Teilmenge $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) \leq z \leq 4\}$ von $\mathbb{R}^3$.

(a) Skizzieren Sie V. (2 P.)

(b) Berechnen Sie das Volumen von V. (5 P.)

(c) Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z < 4\}$.

  (i) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. (3 P.)

  (ii) Berechnen sie den Flächeninhalt von V. (5 P.)

Aufgabe 4: (15 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + 1)\big(\sin(\pi y) + 2\big) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass f unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt. (6 P.)

(b) Untersuchen Sie, ob f lokale Maxima besitzt. (6 P.)

(c) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$. (3 P.)