

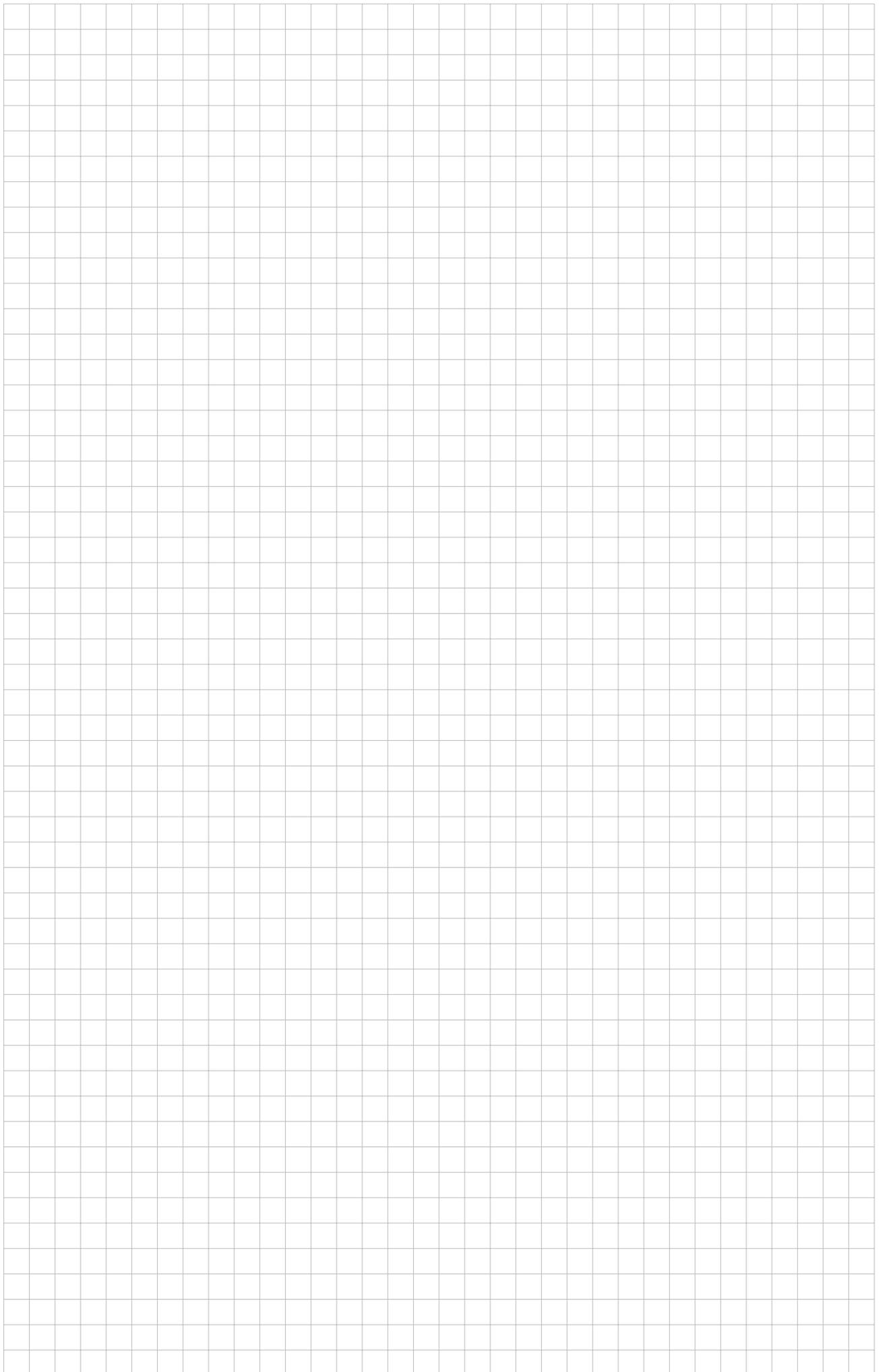
Analysis 2

Name:
Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Alle Hilfsmittel in Papierform sind erlaubt; *elektronische Hilfsmittel sind verboten.*
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben mit gleicher Punktzahl und insgesamt 60 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 30 Punkte hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	2	3	4	Summe
15	15	15	15	60



Aufgabe 1: (15 Punkte)

(a) Geben Sie zwei Beispiele von topologischen Räumen an für welche abgeschlossene und offene Mengen übereinstimmen. (4 P.)

(b) Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: f bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. (4 P.)

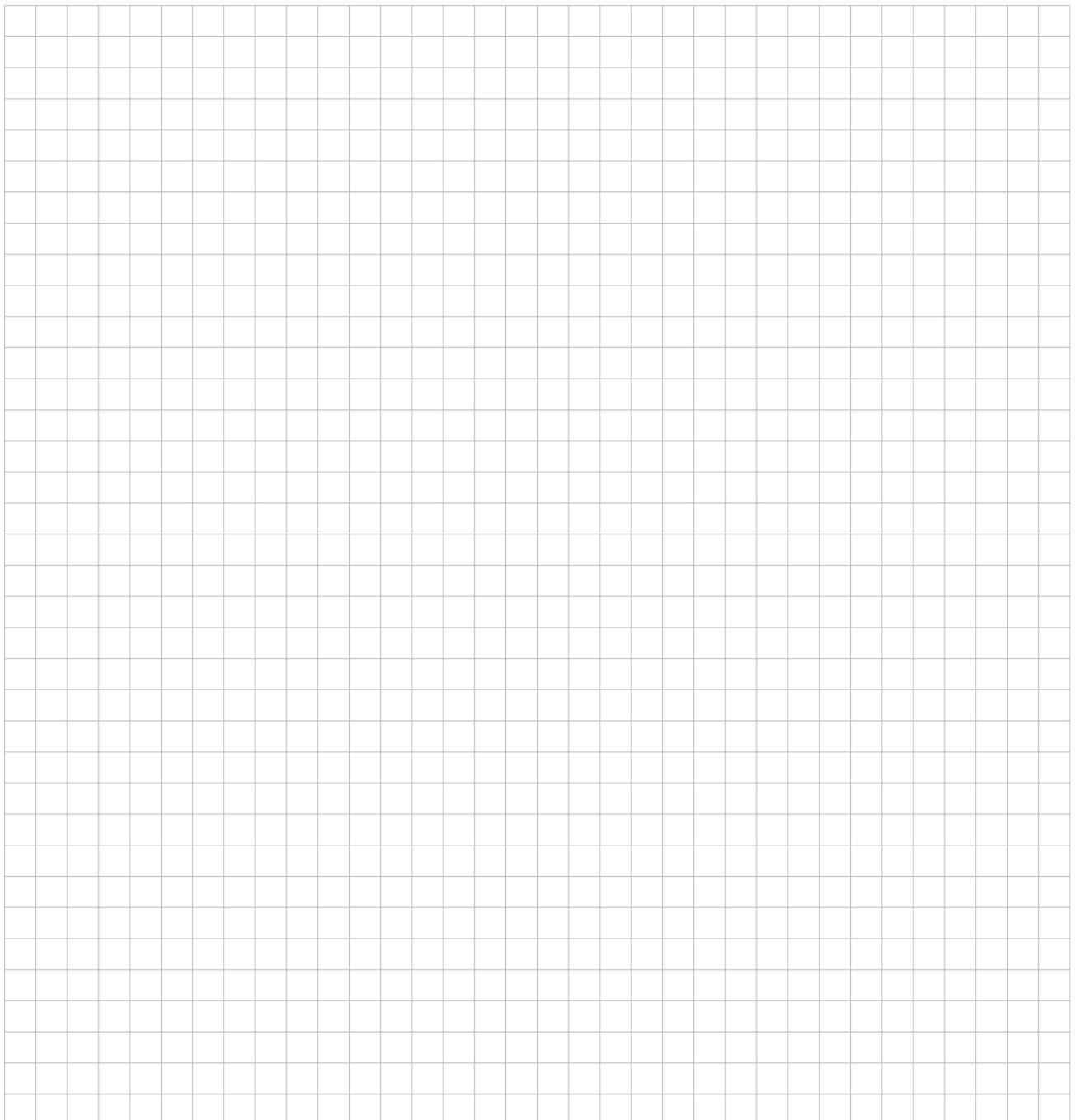
(c) Sie (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung, sodaß

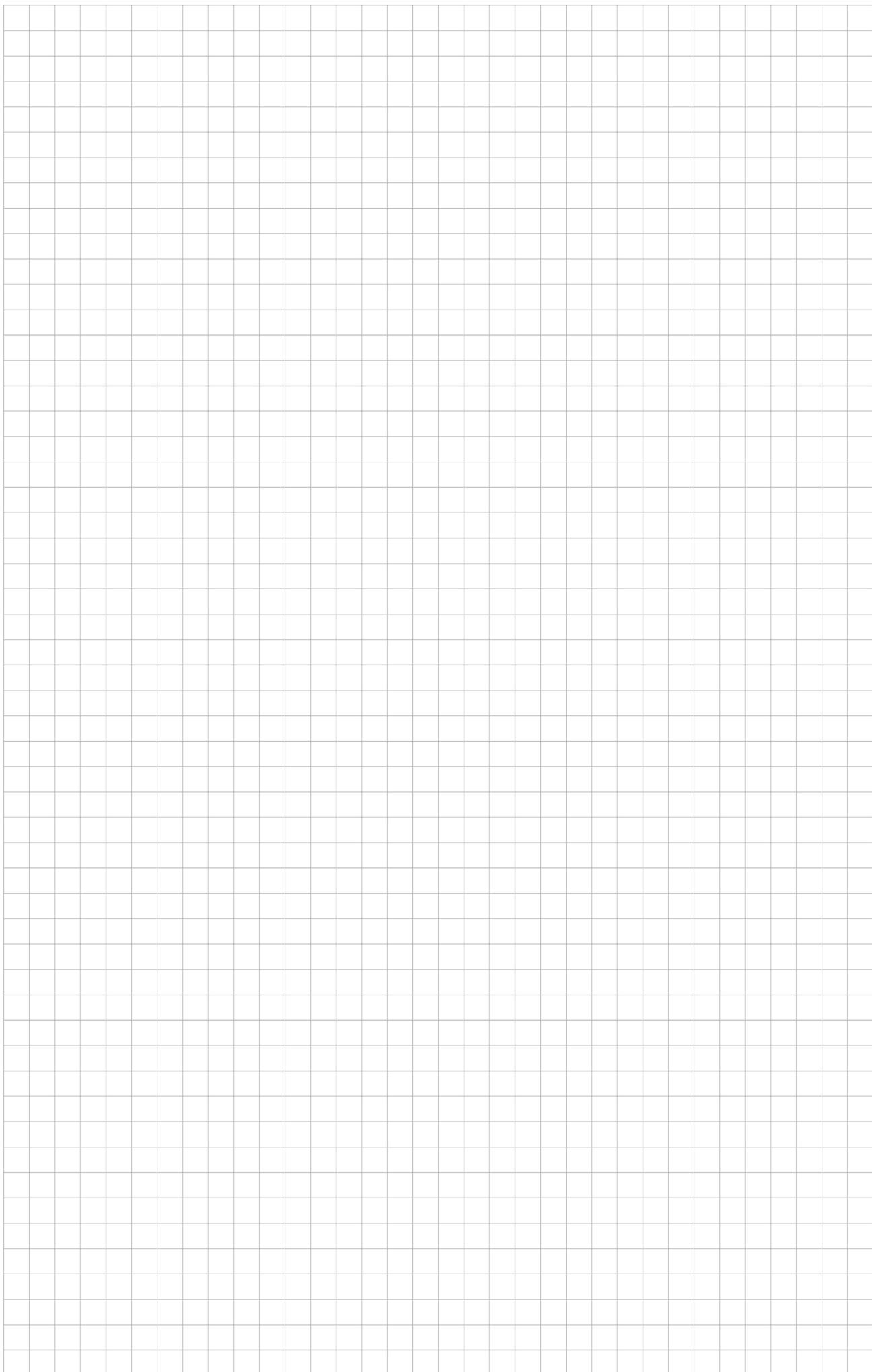
$$(1) \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

(i) Beweisen Sie: Hat f einen Fixpunkt, so ist er eindeutig. (4 P.)

(ii) Hat jede Abbildung mit der Eigenschaft (1) einen Fixpunkt? (3 P.)





Aufgabe 2: (15 Punkte)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Unterraum und sei $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ die orthogonale Projektion auf E . Sei $L(\gamma)$ die Länge einer C^1 -Kurve γ .

(a) Zeigen Sie, dass $L(P \circ \gamma) \leq L(\gamma)$ für alle C^1 -Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. (5 P.)

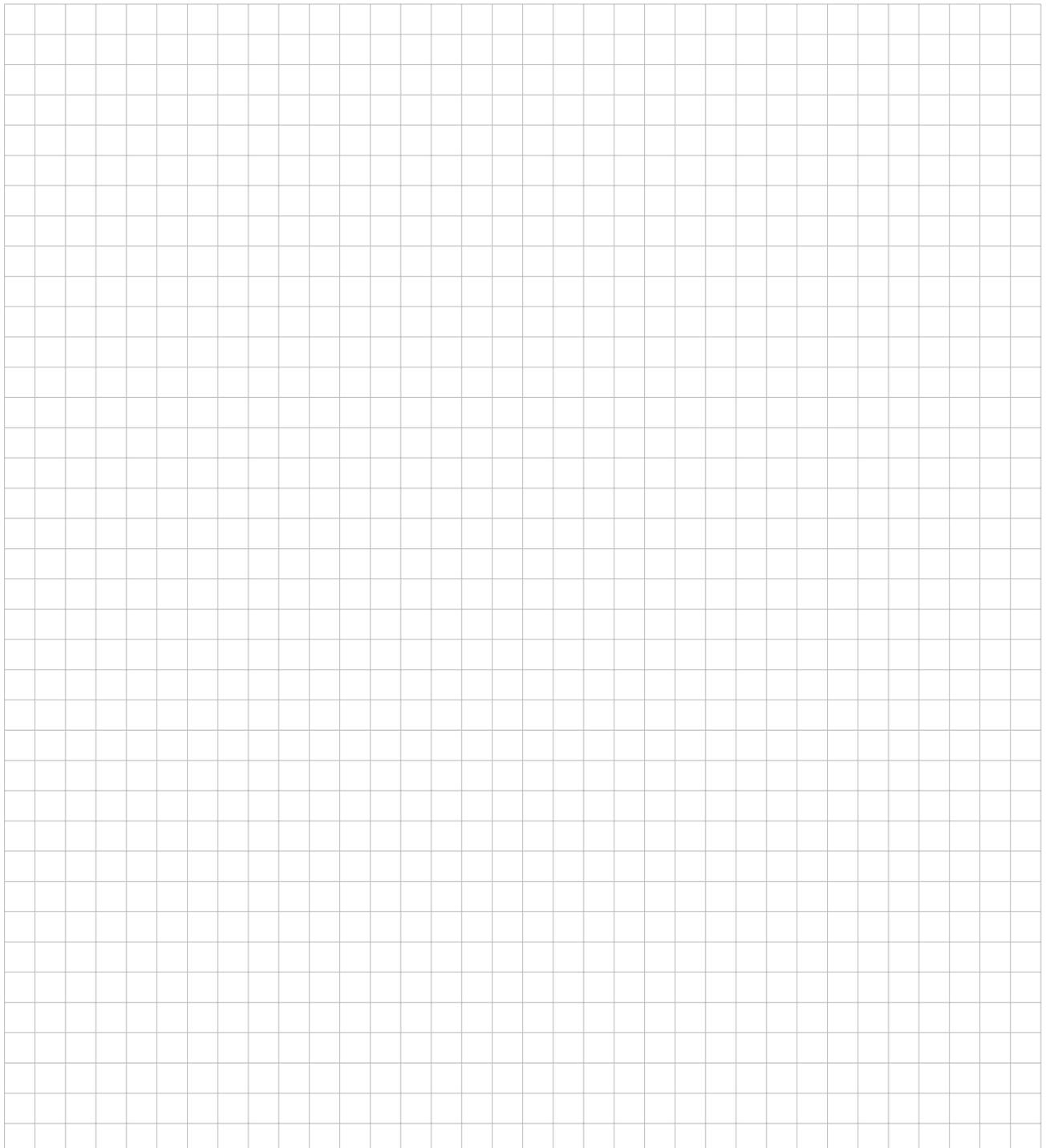
(b) Betrachten Sie die Kurve

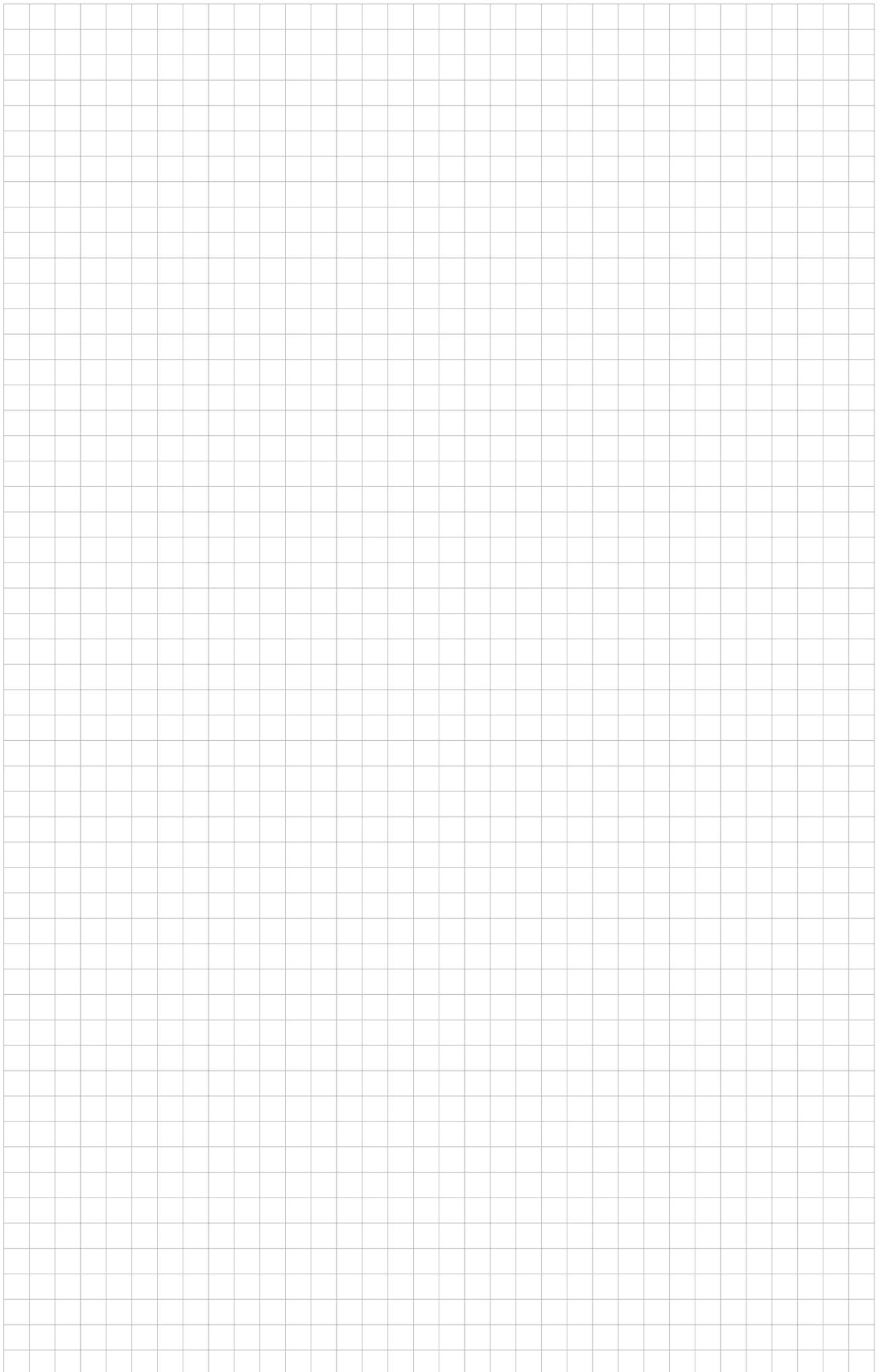
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

(i) Skizzieren Sie $\gamma([0, 2\pi])$. (2 P.)

(ii) Zeigen Sie ohne zu rechnen, dass $L(\gamma) \geq 2\pi$. (2 P.)

(iii) Berechnen Sie $L(\gamma)$. (6 P.)





Aufgabe 3: (15 Punkte)

Betrachtet sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

und die Teilmenge $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) \leq z \leq 4\}$ von \mathbb{R}^3 .

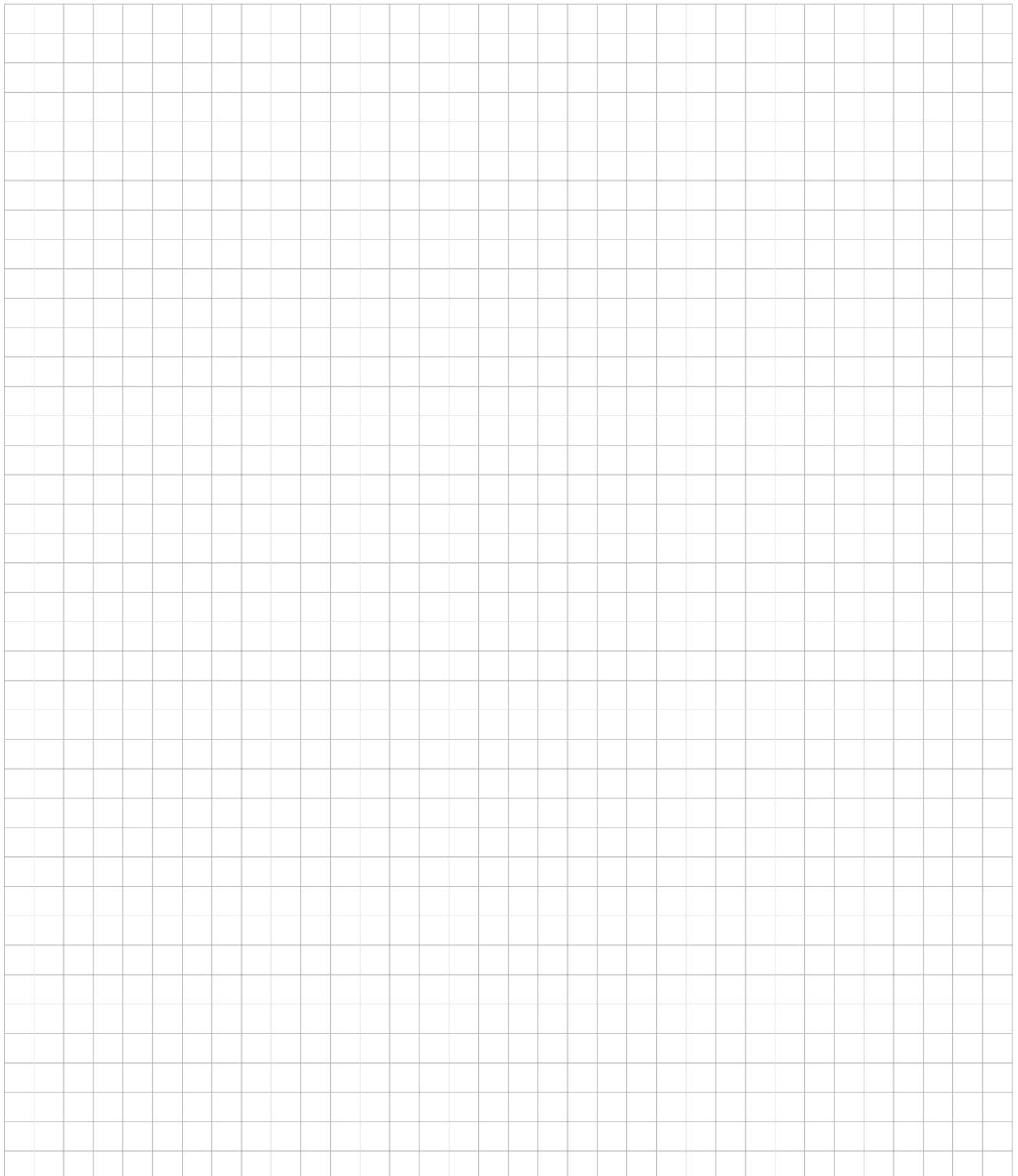
(a) Skizzieren Sie V . (2 P.)

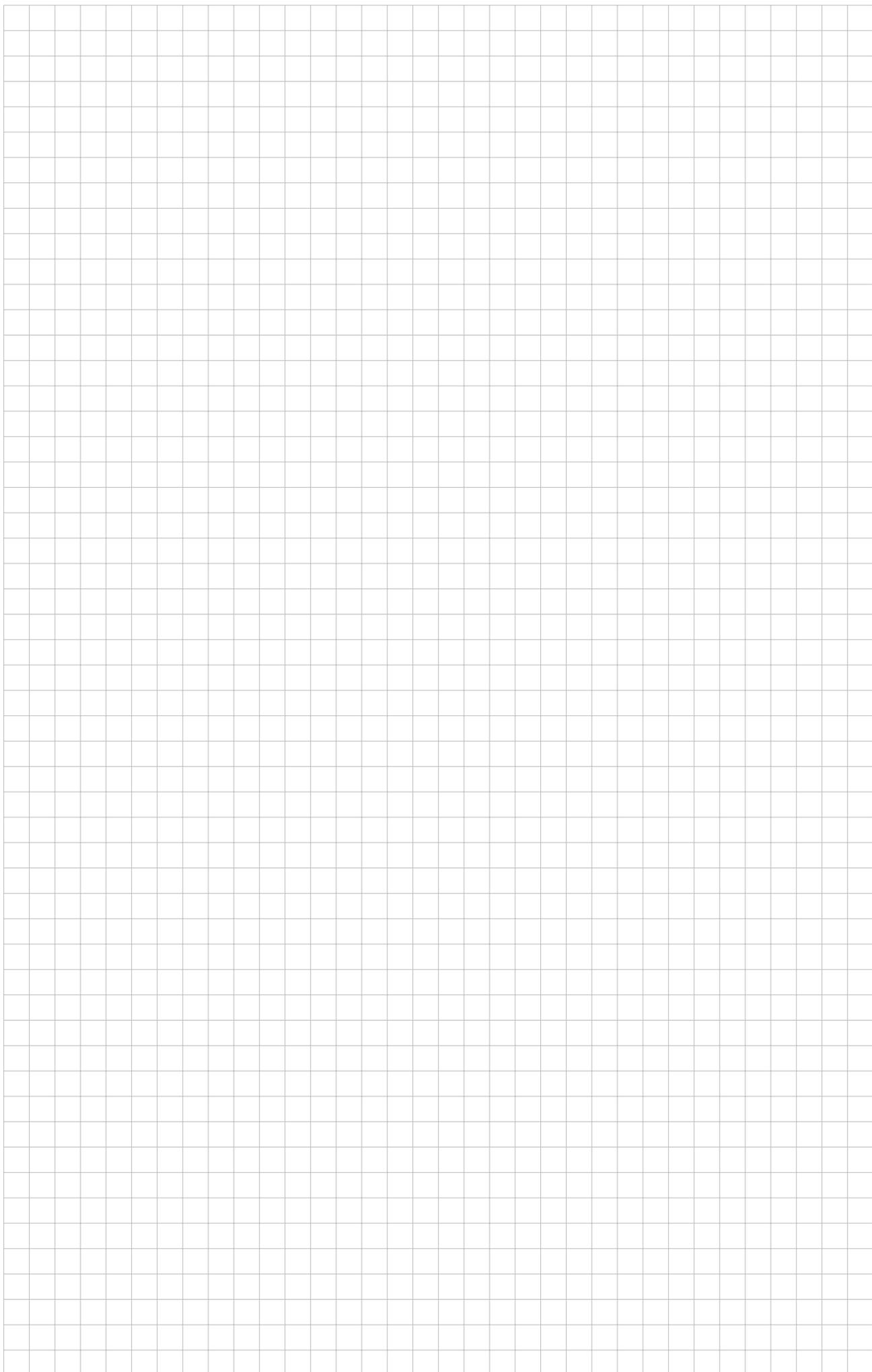
(b) Berechnen Sie das Volumen von V . (5 P.)

(c) Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z < 4\}$.

(i) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. (3 P.)

(ii) Berechnen sie den Flächeninhalt von V . (5 P.)





Aufgabe 4: (15 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + 1)(\sin(\pi y) + 2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

- (a) Zeigen Sie, dass f unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt. (6 P.)
- (b) Untersuchen Sie, ob f lokale Maxima besitzt. (6 P.)
- (c) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R}^2)$. (3 P.)

