Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Sei

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq Y : q^{-1}(A) \text{ ist offen in } X\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Y ist. Diese Topologie wird die Quotiententopologie genannt.

(b) Sei $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Topologie und

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R}, d \neq 0 \right\}.$$

Sei $e_1 = (1, 0)^t \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass H eine abgeschlosse Untergruppe von G ist und $he_1 = e_1$ für alle $h \in H$. Zeigen Sie, dass

$$f : G/H \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad gH \mapsto ge_1$$

eine Bijektion ist.

(c) Betrachten Sie die Quotientenabbildung $q : G \to G/H$. Sei $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie auf G/H, und sei $\mathcal{T}'$ die Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sodass f ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}'$ die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist.

Präsenzaufgabe 1.2 [Soergel, Übung 1.1.34] Gegeben sei ein Maßraum und darin eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$. Man zeige

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Hinweis: Man schreibe die fragliche Vereinigung als die disjunkte Vereinigung der $A_{n+1} \setminus A_n$.

Präsenzaufgabe 1.3 Ist A_0, A_1,... eine Folge von Mengen aus einer σ-Algebra, so gehört auch die Menge

$$A = \{x | x \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\}$$

zu der σ-Algebra. Beweisen Sie dazu zuerst

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right).$$

Präsenzaufgabe 1.4 Sei X eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X : E \text{ ist abzählbar, oder } E^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(b) Sei $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & E^c \text{ ist abzählbar,} \\ 0, & E \text{ ist abzählbar.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein *Maß* auf X ist.

Hausaufgabe 1.1 Sei $\lambda : \mathrm{Borel}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}$, sodass $\lambda([0,1]) = 1$. Beweisen Sie, dass $\lambda(\{x\}) = 0$ für jedes Element $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 1.2 Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass es kein normiertes translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

(a) Wir versehen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Quotiententopologie bezüglich der Projektion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ x \mapsto x + \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, gegeben durch

$$f(x + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i x},$$

ein Homöomorphismus ist.

(b) Beweisen Sie: Jedes translationsinvariante Maß

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$$

bestimmt ein translationsinvariantes Maß $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to [0,\infty]$ auf $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$\nu(A + \mathbb{Z}) = \mu(A) \qquad \big(A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subseteq [0,1)\big).$$

Sei G eine Untergruppe von $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $q \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ gibt, sodass $G = \{nq + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Die Gruppe G wirkt auf $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ durch

$$G \times S^1 \to S^1, (g, x + \mathbb{Z}) \mapsto g \cdot (x + \mathbb{Z}) := g + x + \mathbb{Z}.$$

Sei $R \subseteq S^1$ eine Menge von Repräsentanten für die Menge der G-Orbiten auf S^1.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$G \times R \to S^1, \quad (g, r) \mapsto g \cdot r$$

eine Bijektion ist und S^1 als disjunkte Vereinigung

$$S^1 = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot R \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

Ein Maß $\lambda : \mathcal{P}(S^1) \to [0,\infty]$ auf S^1 heißt G-invariant, wenn für beliebiges $g \in G$ und jedes $A \in \mathcal{P}(S^1)$ gilt

$$\lambda(g \cdot A) = \lambda(A).$$

(d) Beweisen Sie mit Hilfe von (1), dass jedes G-invariante Maß $\lambda : \mathcal{P}(S^1) \to [0,\infty]$ auf S^1 entweder gleich 0 ist, oder die Eigenschaft $\lambda(S^1) = \infty$ hat.

(e) Folgern Sie, dass es kein normiertes translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

Hausaufgabe 1.3 [Soergel, Übung 1.1.35] Gegeben sei ein Massraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und darin eine absteigende Folge meßbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$. Man zeige

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Hausaufgabe 1.4 Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Sei A_0, A_1,... eine Folge von Mengen aus $\mathcal{M}$. Wir definieren den *Limes superior* dieser Mengenfolge durch

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x | x \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right).$$

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $\limsup_{n\to\infty} A_n$ zu $\mathcal{M}$ gehört.

(c) Beweisen Sie das Borel-Cantelli Lemma: Gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

so gilt

$$\mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0.$$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 6.11.2020, 9 Uhr via Panda.