Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

10. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 10.2 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für eine $k+1$-Form α auf U und ein C^1-Vektorfeld $V : U \to \mathbb{R}^n$ sei $\iota_V \alpha$ die k-Form auf U gegeben durch

$$(\iota_V \alpha)_x(X_1, \dots, X_k) := \alpha_x(V(x), X_1, \dots, X_k) \qquad \big(x \in U, X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n\big).$$

Man nennt $\iota_V \alpha$ die Kontraktion von α mit V. Die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_V \alpha$ von α bezüglich V ist definiert als

$$\mathcal{L}_V \alpha = d\big(\iota_V \alpha\big) + \iota_V\big(d\alpha\big).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{L}_V f$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle k-Formen α und l-formen β auf U

$$\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_V \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_V \beta)$$

und

$$\mathcal{L}_V(d\alpha) = d(\mathcal{L}_V \alpha).$$

Sei $G = \big\{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\big\}$ eine glatte Einparametergruppe von Diffeomorphismen auf U, d.h. für jede $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t : U \to U$ ein Diffeomorphismus, sodass

$$\Phi_0 = \mathrm{Id}$$

und

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} \qquad (s, t \in \mathbb{R}),$$

und die Abbildung

$$\mathbb{R} \times U \to U, \quad (t, x) \mapsto \Phi_t(x)$$

glatt ist. Sei $V : U \to \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld, das zu G gehört, d.h. das Vektorfeld, sodass

$$\partial_t \Phi_t(x) = V \circ \Phi_t(x) \qquad (t \in \mathbb{R}, x \in U).$$

(c) Beweisen Sie für alle k-Formen α auf U die Identität

$$\partial_t\big(\Phi_t^* \alpha\big)\big|_{t=0} = \mathcal{L}_V \alpha.$$

Lösung:

(a) Da $\iota_V f$ eine -1-Form ist, gilt $\iota_V f = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_V f\big)(x) &= \Big(\iota_V(df)\Big)(x) = \Big(\iota_V\big(\sum_{k=1}^n \partial_k f\, dx_k\big)\Big)(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x)\, dx_k\big(V(x)\big) \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) V_k(x) = \partial_{V(x)} f(x).\end{aligned}$$

(b) Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ und $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\big(\alpha_1 \wedge \dots \alpha_k\big)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha_1(X_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_k(X_{\sigma(k)})$$

Es folgt, dass für $X \in \mathbb{R}^n$

$$\big(\alpha_1 \wedge \dots \alpha_k\big)(X, \cdot, \dots, \cdot) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha_k(X) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

Wenn $\gamma \in \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$ und $\delta \in \bigwedge^l (\mathbb{R}^n)^*$, dann

$$(\gamma \wedge \delta)(X, \cdot, \dots, \cdot) = \gamma(X, \cdot \ \dots, \cdot) \wedge \delta + (-1)^k \gamma \wedge \delta(X, \cdot \ \dots, \cdot)$$

Wir folgern, dass für eine k-Form α, eine l-Form β und ein Vektorfeld V auf U gilt

$$\iota_V(\alpha \wedge \beta) = (\iota_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_V \beta).$$

Weil

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta),$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) &= (d \circ \iota_V + \iota_V \circ d)(\alpha \wedge \beta) \\
&= d\Big((\iota_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_V \beta)\Big) + \iota_V \Big((d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)\Big) \\
&= (d \circ \iota_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} (\iota_V \alpha) \wedge (d\beta) + (-1)^k (d\alpha) \wedge (\iota_V \beta) + \alpha \wedge (d \circ \iota_V \beta) \\
&\quad + (\iota_V \circ d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} (d\alpha) \wedge (\iota_V \beta) + (-1)^k (\iota_V \alpha) \wedge (d\beta) + \alpha \wedge (\iota_V \circ d\beta) \\
&= (d \circ \iota_V \alpha) \wedge \beta + (\iota_V \circ d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (d \circ \iota_V \beta) + \alpha \wedge (\iota_V \circ d\beta) \\
&= (\mathcal{L}_V \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_V \beta).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$d \circ \mathcal{L}_V = d \circ d \circ \iota_V + d \circ \iota_V \circ d = d \circ \iota_V \circ d = d \circ \iota_V \circ d + \iota_V \circ d \circ d = \mathcal{L}_V \circ d.$$

(c) Für eine k-Form α auf U definieren wir

$$\mathcal{K}(\alpha) = \partial_t \Phi_t^* \alpha\big|_{t=0}.$$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt

$$\mathcal{K}(f)(x) = \partial_t f\big(\Phi_t(x)\big)\big|_{t=0} = \partial_t Df(x) \cdot V(x) = \partial_{V(x)} f(x). = \mathcal{L}_V f(x)$$

Wenn α eine k-Form und β eine l-Form auf U ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\alpha \wedge \beta) &= \partial_t \Phi_t^*(\alpha \wedge \beta)\big|_{t=0} = \partial_t (\Phi_t^* \alpha) \wedge (\Phi_t^* \beta)\big|_{t=0} = (\partial_t \Phi_t^* \alpha)\big|_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge (\partial_t \Phi_t^* \beta)\big|_{t=0} \\
&= \mathcal{K}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{K}(\beta).
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{K}(d\alpha) = \partial_t \Phi_t^*(d\alpha)\big|_{t=0} = \partial_t d\big(\Phi_t^* \alpha\big)\big|_{t=0} = d\big(\partial_t d \Phi_t^* \alpha\big|_{t=0}\big) = d\big(\mathcal{K}(\alpha)\big)$$

Wir haben jetzt bewiesen, dass $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}_V$ die gleiche Eigenschaften bezüglich $\wedge$ und d haben und auf stetig differenzierbare Funktionen übereinstimmen. Da jede Differentialform aus lineare Kombination von Zusammenstellungen von Dachprodukten und äußere Ableitungen von Funktionen besteht, folgt $\mathcal{K} = \mathcal{L}_V$.