Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

11. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 11.3 [Forster 21.7] Es sei $q : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$ die Projektion auf die Einheitssphäre

$$q(x) := \frac{x}{\|x\|} \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

Für eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus 0$ versteht man unter dem Raumwinkel, unter dem A vom Nullpunkt aus erscheint, die Größe

$$\Theta(A) := \mathrm{Vol}_{n-1}\big(q(A)\big).$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus 0$ eine Hyperfläche mit folgender Eigenschaft:

(i) Die Abbildung $q|_M : M \to S^{n-1}$ ist injektiv.

(ii) Für jedes $a \in M$ gilt $\mathbb{R}a + T_aM = \mathbb{R}^n$.

Man zeige:

(a) M ist orientierbar.

(b) Für jedes Kompaktum $A \subseteq M$ gilt

$$\Theta(A) = \left| \int_A \sigma \right|,$$

wobei

$$\sigma := \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Lösung:

(a) Für alle $a \in M$ hat T_aM Dimension $n-1$. Darum gilt

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}a \oplus T_aM.$$

Da N_aM Dimension 1 hat und $a \notin T_aM$, gibt es genau ein Element $x_a \in T_aM$, sodass $a + x_a \in N_aM$. Wir behaupten, dass die Abbidlung $a \mapsto x_a$ stetig ist.

Für $a \in M$ sei p_a die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^n \to T_aM$. Weil $x_a = -p_a(a)$, reicht es zu zeigen, dass

$$M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (a, x) \mapsto p_a(x)$$

stetig ist.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Teilmenge und $\kappa : U \to M$ eine Karte. Seien $V_1, \ldots, V_{n-1}$ die Vektorfelder auf $\kappa(U)$ gegeben durch

$$V_j(a) = D_{\kappa^{-1}(a)}\kappa\big(e_j\big) \qquad (1 \leq j \leq n-1, a \in \kappa(U)),$$

wobei $e_1, \dots, e_{n-1}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Für jede $a \in \kappa(a)$ ist $V_1(a), \dots, V_{n-1}(a)$ eine Basis von $T_a M$. Die Vektorfelder $V_1, \dots, V_{n-1}$ sind stetig weil κ stetig differenzierbar und κ^{-1} stetig ist. Via das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren können wir Vektorfelder $W_1, \dots W_{n-1}$ aus $V_1, \dots, V_{n-1}$ konstruieren mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in \kappa(U)$ die Vektoren $W_1(a), \dots, W_{n-1}(a)$ eine orthogonale Basis von $T_a M$ bilden. Da das Gram-Schmidtsche Verfahren stetig ist, sind die Vektorfelder $W_1, \dots, W_{n-1}$ stetig. Es gilt

$$p_a(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, W_j(a) \rangle W_j(a) \qquad \big(x \in R^n, a \in \kappa(U)\big).$$

Diese Formel zeigt, dass $(a, x) \mapsto p_a(x)$ stetig ist. Wir haben jetzt bewiesen, dass

$$\kappa(U) \to \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto x_a$$

stetig ist. Weil dies gilt für alle Karten von M, folgt, dass

$$M \to \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto x_a$$

stetig ist. Jetzt ist

$$M \to \mathbb{R}^n, \quad a \mapsto \frac{a + x_a}{\|a + x_a\|}$$

ein stetiges Einheitsnormalenfeld von M. Es folgt, dass M orientierbar ist.

(b) Wir beweisen die Aussage nur für eine offene Teilmenge A von M, sodass $\overline{A}$ kompakt und $\partial A = \overline{A} \setminus A$ eine glatte Untermannigfaltigkeit van Dimension $n-2$ ist. Weil

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\partial_i \frac{x_i}{\|x\|^n}\Big)\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\|x\|^n} - n \frac{x_i^2}{\|x\|^{n+2}}\Big) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

ist σ geschlossen. Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $V(x) = x$. Es gilt

$$\begin{aligned} \iota_V \sigma = &\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x_i}{\|x\|^n} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ = &\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(-1)^{i+j} x_i x_j}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &- \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{(-1)^{i+j} x_i x_j}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ = &\ 0. \end{aligned}$$

Für eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit Γ von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir i_Γ für die Inklusion $\Gamma \to \mathbb{R}^n$. Weil $\iota_V \sigma = 0$, gilt $i_\Gamma^* \sigma = 0$ falls $V(x) \in T_x \Gamma$ für alle $x \in \Gamma$. Insbesondere gilt in diesem Fall

$$\int_\Gamma \sigma = 0.$$

Wir betrachten jetzt die offene Menge

$$N = \{tx : \frac{1}{\|x\|} < t < 1, x \in A\}.$$

Es gilt

$$\partial N = q(A) \cup A \cup \Gamma$$

wobei

$$\Gamma = \{tx \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\|x\|} < t < 1, x \in \partial A\}.$$

Wir orientieren N, sodass die von N induzierte Orientierung von A übereinstimmt mit die Orientierung von M. Wir orientieren $q(A)$ und Γ mit der von N induzierte Orientierung. Weill σ geschlossen ist und $V(a) \in T_a\Gamma$ für alle $a \in A$, folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int_A \sigma + \int_{q(A)} \sigma = \int_{\partial N} \sigma = \int_N d\sigma = 0$$

und damit

$$\left| \int_A \sigma \right| = \left| \int_{q(A)} \sigma \right|.$$

Sei

$$\tilde{\sigma} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Weil $i^*_{S^{n-1}}\sigma = i^*_{S^{n-1}}\tilde{\sigma}$, gilt

$$\int_{q(A)} \sigma = \int_{q(A)} \tilde{\sigma}.$$

Eine gleiche Rechnung also zuvor zeigt $i^*_{\tilde{\Gamma}}\tilde{\sigma} = 0$ für jede $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\tilde{\Gamma}$ mit $V(x) \in T_x\tilde{\Gamma}$ für alle $x \in \tilde{\Gamma}$. Wir betrachten jetzt die offene Menge

$$\tilde{N} = \{tx : 0 < t < 1, x \in q(A)\}.$$

Es gilt

$$\partial \tilde{N} = q(A) \cup \tilde{\Gamma}$$

wobei

$$\tilde{\Gamma} = \{tx \in \mathbb{R}^n : 0 < t < 1, x \in \partial q(A)\}.$$

Wir wählen die Orientierung von $\tilde{N}$ Kompatibel mit der Orientierung von $q(A)$. Wir orientieren $\tilde{\Gamma}$ mit der von $\tilde{N}$ induzierte Orientierung. Weill $V(a) \in T_a\tilde{\Gamma}$ für alle $a \in q(A)$, folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int_{q(A)} \tilde{\sigma} = \int_{\partial \tilde{N}} \tilde{\sigma} = \int_N d\tilde{\sigma}.$$

Es gilt

$$d\tilde{\sigma} = n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

und darum

$$\left| \int_N d\tilde{\sigma} \right| = n \mathrm{Vol}_n(\tilde{N})$$

Jetzt setzen wir Polarkoordinaten ein und bekommen

$$\mathrm{Vol}_n(\tilde{N}) = \int_0^1 r^{n-1}\, dr \mathrm{Vol}_{n-1}\big(q(A)\big) = \frac{1}{n}\Theta(A)$$