

Analysis 3

12. Übungsblatt *Ausgewählte Lösungen*

Hausaufgabe 12.1 Berechnen Sie mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + 1, \quad y(1) = 1.$$

Lösung: Das Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren wird gegeben durch $\phi_0 = 1$ und

$$\phi_{k+1}(t) = 1 + \int_1^t \frac{\phi_k(x)}{x} + 1 \, dx \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wir behaupten, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi_k(t) = kt + \sum_{n=0}^k \frac{-k+n+1}{n!} \log(t)^n \quad (1)$$

Wir beweisen diese Identitäten mit Hilfe von Induktion. Für $k = 0$ stimmt die Formel. Nehme jetzt an, dass die Formel stimmt für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} &= 1 + \int_1^t \frac{kx + \sum_{n=0}^k \frac{-k+n+1}{n!} \log(x)^n}{x} + 1 \, dx \\ &= (k+1)t - k + \sum_{n=0}^k \frac{-k+n+1}{n!} \frac{1}{n+1} \log(t)^{n+1} \\ &= (k+1)t - k + \sum_{n=1}^{k+1} \frac{-k-1+n+1}{n!} \log(t)^n \\ &= (k+1)t + \sum_{n=0}^{k+1} \frac{-(k+1)+n+1}{n!} \log(t)^n \end{aligned}$$

Dies beweist (1).

Sei jetzt $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_k(t) &= ke^{\log(t)} + \sum_{n=0}^k \frac{-k+n+1}{n!} \log(t)^n \\ &= k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log(t)^n - k \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \log(t)^n + \sum_{n=0}^k \frac{n}{n!} \log(t)^n + \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \log(t)^n \\ &= k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \log(t)^n + \log(t) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \log(t)^n + \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \log(t)^n. \end{aligned}$$

Weil die Potenzreihe für $x \mapsto e^x$ absolut konvergent ist und

$$\left| k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \log(t)^n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} |\log(t)^n| \leq |\log(t)| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} |\log(t)^n|$$

folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \log(t)^n = 0.$$

Die Summe

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \log(t)^n$$

konvergiert gegen $e^{\log(t)} = t$. Es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(t) = t \log(t) + t.$$

Hausaufgabe 12.2 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t-1 \\ -5t-2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach dem Satz von Picard Lindelöf gibt es genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(0) = \text{Id}. \quad (2)$$

Sei

$$A(t) := \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}+2e^{4t}}{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} & \frac{-2e^{-t}+2e^{4t}}{2e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} \\ \frac{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}}{5} & \frac{2e^{-t}+2e^{4t}}{5} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ ist glatt und es gilt $A(0) = \text{Id}$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) &= \begin{pmatrix} \frac{-3e^{-t}+8e^{4t}}{5} & \frac{2e^{-t}+8e^{4t}}{5} \\ \frac{3e^{-t}+12e^{4t}}{5} & \frac{-2e^{-t}+12e^{4t}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}+2e^{4t}}{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} & \frac{-2e^{-t}+2e^{4t}}{2e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} \\ \frac{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}}{5} & \frac{2e^{-t}+2e^{4t}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A(t) \end{aligned}$$

Es folgt, dass $A(t)$ die Lösung von (2) ist. Weil auch

$$t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (2) ist, folgern wir

$$e^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A(t) = \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}+2e^{4t}}{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} & \frac{-2e^{-t}+2e^{4t}}{2e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}} \\ \frac{-3e^{-\frac{5}{t}}+3e^{4t}}{5} & \frac{2e^{-t}+2e^{4t}}{5} \end{pmatrix}.$$

Wir machen jetzt die Ansatz $y(t) = A(t)v(t)$, wobei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y(t) + A(t)v'(t)$$

und darum

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(t) &= A(t)^{-1} \begin{pmatrix} t-1 \\ -5t-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3e^t+2e^{-4t}}{5} & \frac{-2e^t+2e^{-4t}}{5} \\ \frac{-3e^t+3e^{-4t}}{5} & \frac{2e^t+3e^{-4t}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ -5t-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{13te^t+e^t-8te^{-4t}-6e^{-4t}}{5} \\ \frac{-13te^t-e^t-12te^{-4t}-9e^{-4t}}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt $v(0) = A(0)^{-1}y(0) = y(0) = (3, 3)^t$. Es folgt

$$\begin{aligned}
v(t) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{13se^s + e^s - 8se^{-4s} - 6e^{-4s}}{5} ds \\ \int_0^t \frac{-13se^s - e^s - 12se^{-4s} - 9e^{-4s}}{5} ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{-4t}(t+1) + \frac{1}{5}e^t(13t-12) + 5 \\ \frac{3}{5}e^{-4t}(t+1) - \frac{1}{5}e^t(13t-12) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}+2e^{4t}}{5} & \frac{-2e^{-t}+2e^{4t}}{5} \\ \frac{-3e^{-t}+3e^{4t}}{5} & \frac{2e^{-t}+3e^{4t}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{-4t}(t+1) + \frac{1}{5}e^t(13t-12) + 5 \\ \frac{3}{5}e^{-4t}(t+1) - \frac{1}{5}e^t(13t-12) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{4t} + 3e^{-t} + 3t - 2 \\ 3e^{4t} - 3e^{-t} - 2t + 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$