Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

13. Übungsblatt

Wir fangen die Übung an mit einer Besprechung der Differentialgleichungen die benützt werden in das Modell aus diessem Video.

Präsenzaufgabe 13.1 Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein kompakt getragenes Vektorfeld. Beweisen Sie, dass zu jedem Anfangswert den maximalen Flußweg ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich hat.

Präsenzaufgabe 13.2 Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = fe^{i\omega t},$$

wobei m, c, k, f, ω reelle Konstanten sind. Beschreiben Sie die Lösungen. Was passiert, wenn $c = 0$ und $k = m\omega^2$?

Hausaufgabe 13.1 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$

(b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t$

(c) $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = 1 + e^t cos(2t)$

Hausaufgabe 13.2 (Forster, Aufgabe 15.4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(t) + \frac{a}{t}y'(t) + \frac{b}{t^2}y(t) = 0 \qquad (t > 0), \tag{1}$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ Konstanten seien. Zeigen Sie: Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von (1), wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\psi(t) := \phi(e^t)$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = 0$$

ist. Geben Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem von (1) für alle möglichen Parameterwerte $a, b \in \mathbb{C}$ an.