Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

13. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 13.2 (Forster, Aufgabe 15.4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(t) + \frac{a}{t}y'(t) + \frac{b}{t^2}y(t) = 0 \qquad (t > 0), \tag{1}$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ Konstanten seien. Zeigen Sie: Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von (1), wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\psi(t) := \phi(e^t)$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = 0 \tag{2}$$

ist. Geben Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem von (1) für alle möglichen Parameterwerte $a, b \in \mathbb{C}$ an.

Lösung: Sei ϕ eine C^2-Funktion auf $\mathbb{R}_{>0}$ und $\psi = \phi \circ \exp$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\psi''(t) + (a-1)\psi'(t) + b\psi(t) &= e^{2t}\phi''(e^t) + e^t\phi'(t) + (a-1)e^t\phi'(e^t) + b\phi(e^t) \\
&= e^{2t}\phi''(e^t) + ae^t\phi'(e^t) + b\phi(e^t) \\
&= e^{2t}\Big(\phi''(e^t) + ae^{-t}\phi'(e^t) + be^{-2t}\phi(e^t)\Big) \\
&= e^{2t}\Big(\big(y \mapsto \phi''(y) + \frac{a}{y}\phi'(y) + \frac{b}{y^2}\phi(y)\big) \circ \exp\Big)(t)
\end{aligned}$$

Es folgt, dass ϕ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn ψ eine Lösung von (2) ist.

Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $P(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$. Wenn $b \neq (a-1)^2/4$, dann hat P zwei Nullstellen

$$\lambda_+ = \frac{1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_- = \frac{1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}.$$

Die Lösungen von (2) werden dann gegeben durch Linearkombinationen der Funktionen $t \mapsto e^{\lambda_+ t}$ und $t \mapsto e^{\lambda_- t}$. Die Lösungsmenge von (1) ist den Vektorraum

$$\{c_+y_+ + c_-y_- : c_\pm \in \mathbb{C}\},$$

wobei

$$y_\pm(t) = t^{\lambda_\pm} \qquad (t > 0).$$

Wenn $b = (a-1)^2/4$, dann sind die Lösungen von (2) Linearkombinationen der Funktionen $t \mapsto e^{\lambda_0 t}$ und $t \mapsto te^{\lambda_0 t}$, wobei $\lambda_0 = (1-a)/2$. Die Lösungsmenge von (1) ist den Vektorraum

$$\{c_1y_1 + c_2y_2 : c_{1,2} \in \mathbb{C}\},$$

wobei

$$y_1(t) = t^{\frac{1-a}{2}} \qquad (t > 0)$$

und

$$y_2(t) = \log(t)t^{\frac{1-a}{2}} \qquad (t > 0).$$