Analysis 3

1. Übungsblatt *Ausgewählte Lösungen*

Hausaufgabe 1.2 Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass es kein normiertes translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

(a) Wir versehen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Quotiententopologie bezüglich der Projektion

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x + \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, gegeben durch

$$f(x + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i x},$$

ein Homöomorphismus ist.

(b) Beweisen Sie: Jedes translationsinvariante Maß

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

bestimmt ein translationsinvariantes Maß $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow [0, \infty]$ auf $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$\nu(A + \mathbb{Z}) = \mu(A) \quad (A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subseteq [0, 1)).$$

Sei G eine Untergruppe von $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $q \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ gibt, sodass $G = \{nq + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Die Gruppe G wirkt auf $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ durch

$$G \times S^1 \rightarrow S^1, \quad (g, x + \mathbb{Z}) \mapsto g \cdot (x + \mathbb{Z}) := g + x + \mathbb{Z}.$$

Sei $R \subseteq S^1$ eine Menge von Repräsentanten für die Menge der G -Orbiten auf S^1 .

(d) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$G \times R \rightarrow S^1, \quad (g, r) \mapsto g \cdot r$$

eine Bijektion ist und S^1 als disjunkte Vereinigung

$$S^1 = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot R \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

Ein Maß $\lambda : \mathcal{P}(S^1) \rightarrow [0, \infty]$ auf S^1 heißt G -invariant, wenn für beliebiges $g \in G$ und jedes $A \in \mathcal{P}(S^1)$ gilt

$$\lambda(g \cdot A) = \lambda(A).$$

(e) Beweisen Sie mit Hilfe von (1), dass jedes G -invariante Maß $\lambda : \mathcal{P}(S^1) \rightarrow [0, \infty]$ auf S^1 entweder gleich 0 ist, oder die Eigenschaft $\lambda(S^1) = \infty$ hat.

- (f) Folgern Sie, dass es kein normiertes translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ auf $\mathbb{R}$ gibt.

Lösung:

- (a) Wir betrachten S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ und versehen S^1 mit der induzierten Topologie (Relativ-Topologie).

Sei $A \subseteq S^1$ eine offene Teilmenge. Die Verknüpfung $f \circ p$ ist offensichtlich stetig and darum ist $(f \circ p)^{-1}(A) = p^{-1}(f^{-1}(A))$ offen. Da $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ versehen ist mit der Quotiententopologie, ist auch $f^{-1}(A)$ offen. Es folgt, dass f stetig ist.

Jetzt beweisen wir, dass die Umkehrabbildung auch stetig ist. Die Abbildung $f^{-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $e^{i2\pi x} \mapsto x + \mathbb{Z}$ ist einen Gruppenhomomorphismus. Es reicht darum zu zeigen, dass f^{-1} stetig in 1 ist. Sei U eine offene Umgebung von $f^{-1}(1) = 0 + \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dies bedeutet, dass $p^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ ist. Da $0 \in p^{-1}(U)$ und $p^{-1}(U) = p^{-1}(U) + n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, gibt es ein $0 < \epsilon < 1$, sodass $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - \epsilon, n + \epsilon)$ enthalten ist in $p^{-1}(U)$. Sei $U' = (-\epsilon, \epsilon) + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Da $p^{-1}(U') = V$, ist U' offen in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und erhalten in U . Es gilt

$$f(U') = \{e^{i2\pi x} : -\epsilon < x < \epsilon\} = S^1 \cap B(1, r),$$

wobei $B(1, r)$ die offene Ball in $\mathbb{C}$ mit Radius $r = |e^{i2\pi\epsilon} - 1|$ und Mittelpunkt 1 ist. Es folgt, dass $f(U) \supseteq f(U')$ eine Umgebung von 1 in S^1 ist. Dies beweist, dass f^{-1} stetig ist.

- (b) Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ ein translationsinvariantes Maß. Wir setzen $\nu(A + \mathbb{Z}) = \mu(A)$ für $A \subseteq [0, 1)$. Zuerst bemerken wir, dass jede $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ eindeutig als $B = A + \mathbb{Z}$ mit $A \subseteq [0, 1)$ geschrieben werden kann. Darum definiert ν eine Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow [0, \infty)$. Diese Abbildung hat die folgende Eigenschaften. Es gilt

$$\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset + \mathbb{Z}) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Wenn $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}([0, 1))$ von paarweise disjunkte Mengen ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n + \mathbb{Z})\right) &= \nu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mathbb{Z}\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n + \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Es folgt, dass ν ein Maß ist. Wenn $A \subseteq [0, 1)$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(x + A + \mathbb{Z}) \cap [0, 1) = \left(\lfloor x \rfloor + \left(A \cap [0, 1 - \lfloor x \rfloor]\right)\right) \sqcup \left(\lfloor x \rfloor - 1 + \left(A \cap [1 - \lfloor x \rfloor, 1)\right)\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} \nu(x + A + \mathbb{Z}) &= \nu\left(\left(\lfloor x \rfloor + \left(A \cap [0, 1 - \lfloor x \rfloor]\right)\right) \sqcup \left(\lfloor x \rfloor - 1 + \left(A \cap [1 - \lfloor x \rfloor, 1)\right)\right) + \mathbb{Z}\right) \\ &= \mu\left(\left(\lfloor x \rfloor + \left(A \cap [0, 1 - \lfloor x \rfloor]\right)\right) \sqcup \left(\lfloor x \rfloor - 1 + \left(A \cap [1 - \lfloor x \rfloor, 1)\right)\right)\right) \\ &= \mu\left(\lfloor x \rfloor + \left(A \cap [0, 1 - \lfloor x \rfloor]\right)\right) + \mu\left(\lfloor x \rfloor - 1 + \left(A \cap [1 - \lfloor x \rfloor, 1)\right)\right). \end{aligned}$$

Da μ translationsinvariant ist, ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich

$$\mu\left(A \cap [0, 1 - \lfloor x \rfloor]\right) + \mu\left(A \cap [1 - \lfloor x \rfloor, 1)\right) = \mu(A) = \nu(A + \mathbb{Z}).$$

Es folgt, dass ν translationsinvariant ist.

- (c) Sei $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow G$ ein Gruppenisomorphismus und sei $q \in \mathbb{R}$, sodass $q + \mathbb{Z} = \phi(1)$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\phi(n) = n\phi(1) = nq + \mathbb{Z}$. Da ϕ ein Isomorphismus ist, gilt für jede $n \in \mathbb{N}$, dass $nq + \mathbb{Z} = \phi(n) \neq \phi(0) = 0 + \mathbb{Z}$. Es folgt, dass $nq \notin \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $q \notin \mathbb{Q}$. Zum Schluss gilt

$$G = \phi(\mathbb{Z}) = \{nq + \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

- (d) Weil R eine Menge von Repräsentanten für die Menge von G -Orbiten in S^1 ist, ist die Abbildung $\psi : G \times R \rightarrow S^1$, $(g, r) \mapsto g \cdot r$ bijektiv. Wenn $g, g' \in G$ und $g \cdot R \cap g' \cdot R \neq \emptyset$, dann gibt es $r, r' \in R$, sodass $\psi(g, r) = g \cdot r = g' \cdot r' = \psi(g', r')$. Da ψ bijektiv ist, folgt $g = g'$. Dies beweist, dass die Mengen der Form $g \cdot R$, mit $g \in G$, paarweise disjunkt sind.
- (e) Sei $\lambda : \mathcal{P}(S^1) \rightarrow [0, \infty]$ ein G -invariantes Maß auf S^1 . Da G abzählbar ist, gilt

$$\lambda(S^1) = \lambda\left(\bigsqcup_{g \in G} g \cdot R\right) = \sum_{g \in G} \lambda(g \cdot R) = \sum_{g \in G} \lambda(R).$$

Wenn $\lambda(R) > 0$, dann folgt $\lambda(S^1) = \infty$ und damit $\lambda(A) = 0$ für alle $A \subseteq S^1$. Wenn $\lambda(R) = 0$, dann folgt $\lambda(S^1) = 0$.

- (f) Nehme an, dass $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ ein normiertes translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ ist. Auf gleiche Weise als bei Hausaufgabe 1.1 (in Übung besprochen) folgt, dass $\mu(\{1\}) = 0$. Nach (b) gibt es ein translationsinvariantes Maß ν auf S^1 mit $\nu(S^1) = \mu([0, 1)) = \mu([0, 1]) = 1$. Dieses Ergebnis widerspricht (e).

Hausaufgabe 1.3 [Soergel, Übung 1.1.35] Gegeben sei ein Massraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und darin eine absteigende Folge messbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$. Man zeige

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Lösung: Es gilt

$$A_0 = A_k \sqcup (A_0 \cap A_k^c) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$A_0 = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) \sqcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap A_n^c)\right).$$

und darum

$$\mu(A_0) = \mu(A_k) + \mu(A_0 \cap A_k^c) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\mu(A_0) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap A_n^c)\right).$$

Da alle Maße endlich sind, folgt aus Übungsaufgabe 1.2, dass

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \mu(A_0) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_0 \cap A_n^c)\right) = \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_0 \cap A_n^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_0 \cap A_n^c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Sei $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq n\}$. Dann ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \infty \quad \text{und} \quad \nu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \nu(\emptyset) = 0.$$