Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

1. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 1.1 Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Sei

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq Y : q^{-1}(A) \text{ ist offen in } X\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Y ist. Diese Topologie wird die Quotiententopologie genannt.

(b) Sei $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Topologie und

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R}, d \neq 0 \right\}.$$

Sei $e_1 = (1, 0)^t \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass H eine abgeschlosse Untergruppe von G ist und $he_1 = e_1$ für alle $h \in H$. Zeigen Sie, dass

$$f : G/H \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad gH \mapsto ge_1$$

eine Bijektion ist.

(c) Betrachten Sie die Quotientenabbildung $q : G \to G/H$. Sei $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie auf G/H, und sei $\mathcal{T}'$ die Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sodass f ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}'$ die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist.

Lösung:

(a) Sei I eine Menge und sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen in $\mathcal{T}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\
&q^{-1}(Y) = X \\
&q^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(A_i) \\
&q^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} q^{-1}(A_i).
\end{aligned}$$

Da die Topologie auf X stabil ist unter beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte, folgt, dass auch $\mathcal{T}$ stabil ist unter beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte. Weiter sind $\emptyset$ und X offene Mengen bezüglich der Topologie auf X und darum $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$. Es folgt, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Y ist.

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Sei $g \in G$. Es folgt, dass genau dann $ge_1 = e_1$ gilt, wenn $g \in H$. Insbesondere sehen wir, dass H die Stabilisatoruntergruppe von e_1 in G ist. Für die Abgeschlossenheit betrachten wir die Abbildung

$$\phi : G \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad g \mapsto ge_1.$$

Es gilt $H = \phi^{-1}(\{e_1\})$. Da ϕ stetig und $\{e_1\}$ abgeschlossen ist, folgt, dass H abgeschlossen ist. Zum Schluss zeigen wir, dass f eine Bijektion ist. Wenn $g_1, g_2 \in G$ und $g_1 e_1 = g_2 e_1$, dann gilt $g_2^{-1} g_1 e_1 = e_1$ und damit $g_2^{-1} g_1 \in H$. Es folgt, dass f injektiv ist. Wenn $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dann

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in G.$$

Es folgt, dass f surjektiv ist.

(c) Weil f ein Homöomorphismus ist, ist $\mathcal{T}'$ die Quotientopologie bezüglich der Abbildung f. Da $\mathcal{T}$ die Quotientopologie bezüglich der Abbildung q ist und

$$q^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) = (f \circ q)^{-1}(A) \qquad (A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}),$$

folgt, dass $\mathcal{T}'$ die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung $f \circ q = \phi$ ist.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es gilt genau dann $A \in \mathcal{T}'$, wenn

$$\phi^{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in A \right\}$$

offen in G ist. Da ϕ stetig bezüglich der metrischen Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, ist $\phi^{-1}(A)$ offen in G, wenn A metrisch offen ist. Es folgt, dass die metrische Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathcal{T}'$ erhalten ist. Für die andere Inklusion betrachten wir die Abbildung

$$p : \mathbb{R}^4 \simeq \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass diese Abbildung offen ist, d.h. offene Teilmengen auf offene Teilmengen abbildet. Da G eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ ist, sind die offene Teilmengen von G genau die in G erhaltene offene Teilmengen von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Es folgt, dass $\phi = p\big|_G$ eine offene Abbildung bezüglich der metrischen Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und damit, dass

$$A = \phi\big(\phi^{-1}(A)\big)$$

metrisch offen ist, wenn $\phi^{-1}(A)$ offen in G ist. Dies zeigt, dass $\mathcal{T}'$ in die metrische Topologie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erhalten ist.

Präsenzaufgabe 1.4 Sei X eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X : E \text{ ist abzählbar, oder } E^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(b) Sei $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & E^c \text{ ist abzählbar,} \\ 0, & E \text{ ist abzählbar.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein *Maß* auf X ist.

Lösung:

(a) Da $\emptyset$ abzählbar ist, gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen in $\mathcal{A}$. Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar. Wenn alle A_n abzählbar sind, dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und damit enthalten in $\mathcal{A}$. Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A_k^c abzählbar ist, dann ist das Komplement von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ enthalten in A_k^c und damit abzählbar. In beide Fälle gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{A}$ stabil ist unter Komplementen.

(b) Da $\emptyset$ abzählbar ist, gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$. Wenn alle A_n abzählbar sind, dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A_k^c abzählbar ist, dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$

$$X = \emptyset^c = (A_j \cap A_k)^c = A_j^c \cup A_k^c$$

Da X überabzählbar ist, ist auch A_j^c überabzählbar und es folgt, dass A_j abzählbar ist. Darum gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \mu(A_k) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq k}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Dies beweist, dass μ ein Maß ist.