

Analysis 3

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 [Soergel, Übung 1.1.38: Restriktion von Maßen] Zeigen Sie: Ist $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $A \subseteq X$ eine meßbare Teilmenge, so bilden die in A enthaltenen meßbaren Mengen von X eine σ -Algebra $\mathcal{M}|_A \subseteq \mathcal{P}(A)$ und die Einschränkung von μ ist ein Maß $\mu|_A : \mathcal{M}|_A \rightarrow [0, \infty]$. Wir nennen $(A, \mathcal{M}|_A, \mu|_A)$ den induzierten Maßraum.

Präsenzaufgabe 2.2 [Soergel, Übung 1.2.32] Seien Mengen X und Y sowie Mengerringe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ gegeben. Zeigen Sie, dass das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ein Mengenring in $\mathcal{P}(X \times Y)$ ist.

Präsenzaufgabe 2.3 [Soergel, Übung 1.2.34] Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}$ geben kann. *Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lambda(\{a\}) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$; Zeigen Sie anschließend, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lambda([0, 1/n]) = 1/n$. Erweitern Sie als nächstes die Aussage auf Intervalle mit rationalen Endpunkten und schließlich auf beliebige Intervalle. Wenden Sie dann den Satz über Maßfortsetzungen an.*

Präsenzaufgabe 2.4 [Soergel, Übung 1.2.39: Cantor-Menge] Wir betrachten die Cantor-Menge C , die aus dem Einheitsintervall $C_0 = [0, 1]$ entsteht, indem wir das mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$ herausnehmen, dann aus den beiden so entstehenden kompakten Intervallen wieder jeweils das offene mittlere Drittel und so weiter, und schließlich als C den Schnitt über alle Mengen C_n nehmen, die wir in dieser Weise in n Schritten erhalten. Man zeige, daß die Cantor-Menge das Lebesguemaß $\lambda(C) = 0$ Null hat und überabzählbar ist. *Hinweis: Man kann die Cantor-Menge auch beschreiben als die Menge aller Zahlen, die sich in der Basis Drei mit einer Null vor dem Komma und ohne die Ziffer Eins ausdrücken lassen, in Formeln*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\}.$$

Hausaufgabe 2.1 [Soergel, Übung 1.1.39: Verkleben von Maßen] Sei ein Meßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Teilmengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, daß gilt

$$\mu_n|_{(X_n \cap X_m)} = \mu_m|_{(X_n \cap X_m)}$$

für alle m, n . Man zeige, daß es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit

$$\mu_n = \mu|_{X_n}$$

für alle n .

Hausaufgabe 2.2 [Soergel, Übung 1.2.33] Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben σ -Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem schnittstabilen Erzeugendensystem unserer σ -Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus σ -endlich ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hierbei heißt ein Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ schnittstabil, wenn gilt

$$A \cap B \in \mathcal{S} \quad (A, B \in \mathcal{S}).$$

Hausaufgabe 2.3 [Soergel, Übung 1.2.35] Zeigen Sie, daß es höchstens ein normiertes translationsinvariantes topologisches Maß λ auf $\mathbb{R}^n$ geben kann.

Hausaufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass die Borel'sche σ -algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von den beschränkten Intervallen erzeugt wird.

Hausaufgabe 2.5 [Soergel, Übung 1.2.40] Zeigen Sie: Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bildet eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ vom Lebesguemaß Null.