Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

2. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 2.1 [Soergel, Übung 1.1.39: Verkleben von Maßen] Sei ein Meßraum X die Vereinigung einer Folge X_n meßbarer Teilmengen. Sei auf jeder unserer Teilmengen X_n ein Maß μ_n gegeben derart, daß gilt

$$\mu_n|_{(X_n \cap X_m)} = \mu_m|_{(X_n \cap X_m)}$$

für alle m, n. Man zeige, daß es dann genau ein Maß μ auf X gibt mit

$$\mu_n = \mu|_{X_n}$$

für alle n.

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Y_n := X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k.$$

Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter und meßbarer Teilmengen und

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n.$$

Für eine meßbare Teilmenge A setzen wir

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_n).$$

Wir behaupten, dass μ ein Maß ist.

Erstens gilt

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\emptyset \cap Y_n) = 0.$$

Zweitens, wenn $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter meßbarer Teilmengen ist, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n\left(\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\Big) \cap Y_n\right) = \mu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (A_m \cap Y_n)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n\big(A_m \cap Y_n\big)$$

und damit

$$\begin{aligned}\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\left(\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\Big) \cap Y_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n\big(A_m \cap Y_n\big)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\big(A_m \cap Y_n\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).\end{aligned}$$

Es folgt, dass μ ein Maß ist.

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq X_n$, dann ist $(A \cap Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von X_n mit den Eigenschaften

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (A \cap Y_m)$$

und

$$\mu_m(A \cap Y_m) = \mu_n(A \cap Y_m) \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Es folgt

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(A \cap Y_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_m) = \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \Big(A \cap Y_m\Big)\right) = \mu_n(A).$$

Dies zeigt, dass $\mu|_{X_n} = \mu_n$.

Wenn ν ein zweites Maß ist mit $\nu|_{X_n} = \mu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle meßbare Teilmengen A

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(A \cap Y_n\Big)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_n) = \mu(A).$$

Es folgt $\nu = \mu$.

Hausaufgabe 2.2 [Soergel, Übung 1.2.33] Man zeige, daß zwei Maße auf ein- und derselben σ-Algebra übereinstimmen, sobald sie auf einem schnittstabilen Erzeugendensystem unserer σ-Algebra übereinstimmen, das darüber hinaus σ-endlich ist in dem Sinne, daß die ganze Menge durch eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus besagtem Erzeugendensystem überdeckt werden kann. Hierbei heißt ein Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ schnittstabil, wenn gilt

$$A \cap B \in \mathcal{S} \qquad (A, B \in \mathcal{S}).$$

Lösung: Wir schreiben $\mathcal{M}$ für die σ-Algebra und $\mathcal{S}$ für das Schnittstabile σ-endliche Erzeugendensystem. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\emptyset \in \mathcal{S}$. Seien μ und ν Maßen auf X, sodass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge eine Folge von Mengen endlichen Maßes aus $\mathcal{S}$ mit

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Wir beweisen zuerst, dass $\mu_n := \mu|_{X_n} = \nu|_{X_n} =: \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$\mathcal{M}_n := \{A \in \mathcal{M} : A \subseteq X_n\}, \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_n := \{A \in \mathcal{S} : A \subseteq X_n\}.$$

Jetzt ist $\mathcal{S}_n$ ein Schnittstabiles Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{M}_n$ auf X_n.

Wir definieren

$$\mathcal{E}_n := \{A \in \mathcal{M}_n : \mu_n(A) = \nu_n(A)\}$$

Wenn $A, B \in \mathcal{E}_n$ und $A \cap B \in \mathcal{E}_n$, dann

$$\mu_n(A\cup B) = \mu_n(A)+\mu_n(B)-\mu_n(A\cap B) = \nu_n(A)+\nu_n(B)-\nu_n(A\cap B) = \nu_n(A\cup B).$$

Hier haben wir benützt, dass μ_n und ν_n endliche Maßen auf X_n sind. Es folgt, dass $A \cup B \in \mathcal{E}_n$. Weiter gilt für alle $A \in \mathcal{E}_n$

$$\mu_n(A^c) = \mu_n(X_n) - \mu_n(A) = \nu_n(X_n) - \nu_n(A) = \nu_n(A^c),$$

und darum $A^c \in \mathcal{E}_n$.

Diese Aussagen haben die folgende Implikation. Sei $E \subseteq \mathcal{E}_n$ schnittstabil. Wenn $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E ist, dann

$$\mu_n\Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) = \nu_n\Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) \qquad (m \in \mathbb{N})$$

und darum

$$\begin{aligned}
\mu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) &= \mu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big)\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_n\Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \nu_n\Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big) = \nu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\Big)\right) \\
&= \nu_n\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right).
\end{aligned}$$

Wir folgern, dass $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \in \mathcal{E}_n$.

Sei $\mathcal{V}_n^1$ die Menge aller abzählbarer Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{S}_n$. Da $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{E}_n$ Schnittstabil ist, folgt, dass $\mathcal{V}_n^1$ schnittstabil ist und $\mathcal{V}_n^1 \subseteq \mathcal{E}_n$. Wir setzen

$$\mathcal{S}_n^2 := \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{V}_n^1\}.$$

Bemerke, dass $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{V}_n^1 \subseteq \mathcal{S}_n^2 \subseteq \mathcal{E}_n$. Da $\mathcal{V}_n^1$ stabil unter Vereinigungen und schnittstabil ist, ist $\mathcal{S}_n^2$ schnittstabil. Jetzt widerholen wir dieses Prozess und bekommen eine aufsteigende Folge $(\mathcal{S}_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ von schnittstabile Teilmengen von $\mathcal{E}_n$. Die Vereinigung

$$\mathcal{A}_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n^m$$

ist enthalten in $\mathcal{E}_n$ und stabil unter endliche Vereinigungen und das Bilden von Differenzen. Es folgt, dass $\mathcal{A}_n$ eine Mengenalgebra ist. Bemerke, dass $\mathcal{M}_n$ von $\mathcal{A}_n$ erzeugt wird. Nach dem Satz von Caratheodory (Satz 1.2.10) gilt $\mu_n = \nu_n$.

Jetzt folgt aus Hausaufgabe 2.1, dass $\mu = \nu$.