Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Beweisen Sie den Satz von Steinhaus: Für eine Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Lebesgue-Maß $\lambda(A) > 0$ ist die Menge

$$A - A = \big\{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in A\big\}$$

eine Umgebung von 0.

Präsenzaufgabe 3.2 [Soergel Übung 1.3.6] Man zeige: Eine Teilmenge der reellen Zahlengeraden ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\epsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n]$ überdecken läßt derart, daß gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n) < \epsilon.$$

Präsenzaufgabe 3.3 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{S}$ eine Topologie auf Y und sei $f^*\mathcal{S} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{S}\}$ die Initialtopologie auf X. Sei Z ein weiterer topologischer Raum und $g : Z \to X$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass g genau dann stetig ist, wenn $f \circ g$ stetig ist.

Präsenzaufgabe 3.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) f bildet Lebesgue-Nullmengen auf Lebesgue-Nullmengen ab.

(b) f bildet Lebesgue-meßbare Mengen auf Lebesgue-meßbare Mengen ab.

Hausaufgabe 3.1 [Soergel Übung 1.1.41 (Gitterpunkte und Volumen)] Gegeben sei eine kompake konvexe Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$\lambda(K) = \lim_{l \searrow 0} l^n \big| K \cap l\mathbb{Z}^n \big| = \lim_{l \searrow 0} l^n \big| \{ q \in l\mathbb{Z}^n : K \cap (q + [0,l]^n) \neq \emptyset \} \big|.$$

In Worten hängt das Maß von K also eng zusammen mit der Zahl der Gitterpunkte in K, und je feiner das Gitter wird, desto besser wird diese Approximation. *Hinweis: Liegt K nicht in einem echten affinen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, so umfaßt es einen offenen Ball, ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen offenen Ball um den Ursprung. Dann versuche man, K auf Rechenpapier zu zeichnen und zwischen K und eine gestreckte Kopie $(1+\epsilon)K$ eine Vereinigung von Rechenkästchen einzuschachteln.*

Hausaufgabe 3.2 Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ Meßräume und $f : X \to Y$ eine Meßbare Abbildung. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{M})$ und definiere

$$f_*\mu : \mathcal{N} \to [0, \infty], \qquad A \mapsto \mu\big(f^{-1}(B)\big).$$

Zeigen Sie, dass $f_*\mu$ ein Maß auf $(Y, \mathcal{N})$ ist. Dieses Maß wird den Vorschub oder Push-forward von μ entlang f genannt.

Hausaufgabe 3.3 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und sei $f_*\mathcal{T} = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ die Finaltopologie auf Y. Sei Z ein weiterer topologischer Raum und $g : Y \to Z$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass g genau dann stetig ist, wenn $g \circ f$ stetig ist.

Hausaufgabe 3.4 [Soergel Übung 1.4.39]

(a) Man zeige, daß jede linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar ist. *Hinweis: Man schreibe f als punktweisen Grenzwert stückweise konstanter Funktionen.*

(b) Man zeige, daß jede in jeder Variablen monoton wachsende und linksseitig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 20.11.2020, 9 Uhr via Panda.