

Analysis 3

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 [Soergel Übung 1.5.21] Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine Zerlegung in abzählbar viele paarweise disjunkte meßbare Teilmengen. So gilt für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ die Formel

$$\int_X f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_n} f.$$

Präsenzaufgabe 4.2 [Soergel Übung 1.5.22] Gegeben eine meßbare nichtnegative Funktion g auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit

$$\int_X g \mu < \infty$$

gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A g \mu < \epsilon.$$

Hinweis: Es gibt sicher eine meßbare Stufenfunktion $h : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $h \leq g$ und

$$\int g \mu \leq \int h \mu + \epsilon/2.$$

Präsenzaufgabe 4.3 Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x) \frac{x^2 - y^2}{x^2} & (0 < y < |x|), \\ 0 & (|x| \leq y). \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Abbildungen

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, y) \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto \int_0^1 f(x, y) dy$$

differenzierbar in $x = 0$ sind. Berechnen Sie $\partial_x \int_0^1 f(x, y) dy$ und $\int_0^1 \partial_x f(0, y) dy$.

Präsenzaufgabe 4.4 Beweisen Sie das Lemma von Fatou: Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Für jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer, meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist die Funktion

$$f : X \rightarrow [0, \infty], \quad x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

meßbar und gilt

$$\int_X f \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \mu.$$

Präsenzaufgabe 4.5 [Soergel Übung 1.6.16 (Integrale unter Bildmaßen)] Sind $\phi : X \rightarrow Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen, μ ein Maß auf X und $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist f integrierbar in Bezug auf $\phi_*\mu$ genau dann, wenn $\phi^*f := f \circ \phi$ integrierbar ist in Bezug auf μ , und unter dieser Voraussetzung

$$\int_Y f(\phi_*\mu) = \int_X \phi^*f \mu.$$

Hausaufgabe 4.1 [Soergel Übung 1.5.24] Man zeige: Gegeben ein Maßraum X und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer meßbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ist auch ihre Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ meßbar und es gilt

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Hausaufgabe 4.2 Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{\ln(x)} dx.$$

Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log(x)} dx$$

und berechnen Sie f' und $f(0)$.

Hausaufgabe 4.3 Sei $f_k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & (0 < x < k^2), \\ 0 & (k^2 \leq x). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f_k(x)$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_k(x) dx = \infty.$$

Warum ist dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zu Satz 1.6.9?

Hausaufgabe 4.4 [Soergel Übung 1.6.17 (Satz von Beppo Levi)] Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge N aller $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ meßbar vom Maß Null und die Funktion

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : X \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$$

ist integrierbar mit Integral

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$