Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

4. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 4.2 Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{\ln(x)}\,dx.$$

Lösung: Die Abbildung $x \mapsto \frac{x^t-1}{\log(x)}$ ist für jede $t > -1$ integrierbar auf $(0,1)$ und für alle $-1 < t_0 \leq t$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{x^t-1}{\log(x)} = x^t \leq x^{t_0} \qquad \big(x \in (0,1)\big).$$

Da für alle $t_0 > -1$ die Abbildung $x \mapsto x^{t_0}$ integrierbar ist auf $(0,1)$, folgt aus Übung 1.6.15 (besprochen in die Vorlesung), dass die Abbildung

$$f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^1 \frac{x^t-1}{\log(x)}\,dx$$

differenzierbar ist mit Ableitung gegeben durch

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{x^t-1}{\log(x)}\,dx = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{t+1}.$$

Weiter gilt

$$f(0) = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Es folgt

$$f(t) = \int_0^t f'(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{1+\tau}\,d\tau = \log(1+t) \qquad (t \geq 0).$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{\ln(x)}\,dx = f(3) = \log(4).$$

Hausaufgabe 4.4 [Soergel Übung 1.6.17 (Satz von Beppo Levi)] Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen. Ist die Folge ihrer Integrale beschränkt, so ist die Menge N aller $x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ meßbar vom Maß Null und die Funktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n : X \setminus N \to \mathbb{R}$$

ist integrierbar mit Integral

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Lösung: Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad (x \in X).$$

Nach Satz 1.4.27 ist ϕ. Es gilt

$$N = \phi^{-1}(\{\infty\}) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (k,\infty]\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \phi^{-1}\big((k,\infty]\big).$$

Da N eine abzählbare Schnitt meßbarer Mengen und damit Meßbar.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n = f_n - f_1 : X \to \mathbb{R}$. Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge nicht-negativer integrierbarer Funktionen. Sei $g : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \phi(x) - f_1(x) \qquad (x \in X).$$

Nach Satz 1.4.27 ist g meßbar und nach Satz 1.5.12 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\mu = \int_X g\mu.$$

Wenn die Folge $\left(\int_X f_n\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist auch die Folge $\left(\int_X g_n\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und gilt

$$\int_N g\mu = \int_X g\mu < \infty.$$

Insbesondere ist g integrierbar und da $g\big|_N = \infty$, folgt $\mu(N) = 0$ und damit $\int_N g\mu = 0$. Sei $f = \phi\big|_{X\setminus N}$. Dann ist $f = (g+f_1)\big|_{X\setminus N}$ eine Summe integrierbarer Funktionen und ist damit integrierbar. Weiter gilt

$$\int_{X\setminus N} f\mu = \int_{X\setminus N} \phi\mu = \int_{X\setminus N} g\mu + \int_{X\setminus N} f_1\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus N} g_n\mu + \int_{X\setminus N} f_1\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus N} f_n\mu.$$