Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

4. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 4.4 Beweisen Sie das Lemma von Fatou: Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, meßbarer Funktionen $f_n : X \to [0,\infty]$ ist die Funktion

$$f : X \to [0,\infty], \quad x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

meßbar und gilt

$$\int_X f\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mu.$$

Lösung: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung

$$g_n : X \to [0,\infty], \quad x \mapsto\to \inf_{k\ge n} f_k(x).$$

Nach Satz 1.4.27 sind sowohl die Abbildungen g_n, als den punktweise Limes

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n,$$

meßbar. Da die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gilt nach der Satz über monotone Konvergenz (Satz 1.5.12)

$$\int_X f\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\mu.$$

Wenn $k \ge n$, dann $g_n \le f_k$. Es folgt

$$\int_X g_n\mu \le \int_X f_k\mu \qquad (k \ge n)$$

und damit

$$\int_X g_n\mu \le \inf_{k\ge n} \int_X f_k\mu.$$

Wir folgern

$$\int_X f\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} \int_X f_k\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\mu.$$

Präsenzaufgabe 4.5 [Soergel Übung 1.6.16 (Integrale unter Bildmaßen)] Sind $\phi : X \to Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen, μ ein Maß auf X und $f : Y \to \mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, so ist f integrierbar in Bezug auf $\phi_*\mu$ genau dann, wenn $\phi^* f := f \circ \phi$ integrierbar ist in Bezug auf μ, und unter dieser Voraussetzung

$$\int_Y f(\phi_*\mu) = \int_X \phi^* f\mu.$$

Lösung: Wenn $A \subseteq Y$ meßbar ist, dann gilt $\mathbf{1}_{\phi^{-1}(A)} = \phi^*\mathbf{1}_A$ und damit

$$\int_Y \mathbf{1}_A(\phi_*\mu) = (\phi_*\mu)(A) = \mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \int_X \mathbf{1}_{\phi^{-1}(A)}\mu = \int_X (\phi^*\mathbf{1}_A)\mu.$$

Wegen Linearität gilt

$$\int_Y \psi(\phi_*\mu) = \int_X (\phi^*\psi)\mu$$

für alle meßbare Stufenfunktionen ψ auf Y.

Sei $g : Y \to [0, \infty]$ eine Meßbare Abbildung. Nach Lemma 1.5.15 gibt es eine monotone Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer nicht-negativer Stufenfunktionen, die punktweise gegen g konvergiert. Aus der Satz über monotone Konvergenz (Satz 1.5.12) folgt

$$\int_Y g(\phi_*\mu) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \psi_n(\phi_*\mu) = \lim_{n\to\infty} \int_X (\phi^*\psi_n)\mu = \int_X (\phi^*g)\mu.$$

Wenn $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Meßbare Abbildung ist, dann ist $|f|$ meßbar und nicht-negativ. Darum gilt

$$\int_Y |f|(\phi_*\mu) = \int_X (\phi^*|f|)\mu = \int_X |\phi^*f|\mu.$$

Es folgt, dass $|f|$ genau dann integrierbar bezüglich $\phi^*\mu$ is, wenn $|\phi^*f|$ integrierbar bezüglich μ ist. Seien $f^+, f^- : Y \to [0, \infty)$ die Abbildungen, sodass $f = f^+ - f^-$. Dann sind f^+ und f^- meßbar und nicht-negativ und darum

$$\int_Y f(\phi_*\mu) = \int_Y f^+(\phi_*\mu) - \int_Y f^-(\phi_*\mu) = \int_Y (\phi^*f^+)\mu - \int_Y (\phi^*f^-)\mu = \int_Y (\phi^*f)\mu.$$