Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *absolut stetig*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\sum_{k=1}^{n} \big|f(y_k) - f(x_k)\big| < \epsilon.$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Intervalle $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \subseteq [a,b]$ mit $\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta$.

(a) Beweisen Sie, dass

$$[0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$$

stetig ist. Ist diese Abbildung absolut stetig?

(b) Beweisen Sie, dass Lipschitz-stetige Funktionen auf $[a,b]$ absolut stetig sind.

(c) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Funktion. Beweisen Sie, dass f Nullmengen auf Nullmengen abbildet.

(d) Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x \phi(y)\, dy$$

absolut stetig ist.

Ausblick: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Mit Hilfe des Radon-Nikodym-Satzes [1] kann man zeigen, dass die folgende drei Aussagen äquivalent sind.[2]

(i) f ist absolut stetig.

(ii) f is fast überall differenzierbar. Für $x \in [a,b]$ wo f differenzierbar ist, sei $f'(x)$ die Ableitung von f an dieser Stelle. Setzte $f'(x) = 0$ für $x \in [a,b]$, wenn f nicht differenzierbar ist in x. Dann ist $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)\, dy \qquad (x \in [a,b]).$$

Präsenzaufgabe 5.2 Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$. Ist das Ergebnis im Widerspruch zu dem Satz von Fubini?

Präsenzaufgabe 5.3 Man zeige, daß das Produkt von zwei kompakten Räumen stets wieder kompakt ist.

[1] Rudin, Complex and Real Analysis, Theorem 6.10
[2] Rudin, Complex and Real Analysis, Theorem 7.18 und Theorem 7.20

Hausaufgabe 5.1 (Soergel, Übung 1.7.28) Zeigen Sie: Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$ hat das Volumen $(n!)^{-1}$.

Hausaufgabe 5.2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch

$$f(x) = x_1 x_2 + x_2^2 - x_1^3 x_2 \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

und sei $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_A f(x)\, dx.$$

Hausaufgabe 5.3 Sei

$$I : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt$$

(a) Zeigen Sie die Identität

$$I(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty e^{-x(t^2 + t^{-2})}\, dt \qquad \big(x \in (0, \infty)\big).$$

(b) Schreiben Sie $I(x)$ als ein Summe von einem Integral über $(0, 1)$ und einem Integral über $(1, \infty)$. Benützen Sie die Transformationsformel und ersetzen Sie t durch t^{-1} in das erste Integral. Zeigen Sie damit

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^\infty (1 + t^{-2}) e^{-x(t^2 + t^{-2})}\, dt \qquad \big(x \in (0, \infty)\big).$$

(c) Setzen Sie $u = t - t^{-1}$ und zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsformel

$$I(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty e^{-x(u^2 + 2)}\, du \qquad \big(x \in (0, \infty)\big).$$

(d) Beweisen Sie, dass

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2}\, d(x, y) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr = \pi.$$

Folgern Sie

$$I(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-2x} \qquad \big(x \in (0, \infty)\big).$$

(e) Beweisen Sie die Identität

$$e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dt \qquad \big(x \in (0, \infty)\big). \tag{1}$$

Die Euler Gamma Funktion ist gegeben durch

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \int_0^\infty x^{\lambda - 1} e^{-x}\, dx.$$

(f) Multiplizieren Sie beide Seiten von (1) mit $x^{\lambda - 1}$ und zeigen Sie

$$\Gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda - 1} \frac{e^{-t - \frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dt\, dx \qquad \big(\lambda \in (0, \infty)\big)$$

(g) Verwenden Sie den Satz von Fubini und beweisen Sie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma(\lambda) = \frac{2^{\lambda - 1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) \Gamma\Big(\frac{\lambda + 1}{2}\Big) \qquad \big(\lambda \in (0, \infty)\big).$$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 4.12.2020, 9 Uhr via Panda.