Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

5. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 5.3 Sei

$$I : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie die Identität

$$I(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty e^{-x(t^2+t^{-2})}\, dt \qquad \big(x \in (0,\infty)\big).$$

(b) Schreiben Sie $I(x)$ als ein Summe von einem Integral über $(0,1)$ und einem Integral über $(1,\infty)$. Benützen Sie die Transformationsformel und ersetzen Sie t durch t^{-1} in das erste Integral. Zeigen Sie damit

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^\infty (1+t^{-2}) e^{-x(t^2+t^{-2})}\, dt \qquad \big(x \in (0,\infty)\big).$$

(c) Setzen Sie $u = t - t^{-1}$ und zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsformel

$$I(x) = \sqrt{x} \int_0^\infty e^{-x(u^2+2)}\, du \qquad \big(x \in (0,\infty)\big).$$

(d) Beweisen Sie, dass

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr = \pi.$$

Folgern Sie

$$I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-2x} \qquad \big(x \in (0,\infty)\big).$$

(e) Beweisen Sie die Identität

$$e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dt \qquad \big(x \in (0,\infty)\big). \tag{2}$$

Die Euler Gamma Funktion ist gegeben durch

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx.$$

(f) Multiplizieren Sie beide Seiten von (2) mit $x^{\lambda-1}$ und zeigen Sie

$$\Gamma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\lambda-1} \frac{e^{-t-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dt\, dx \qquad \big(\lambda \in (0,\infty)\big)$$

(g) Verwenden Sie den Satz von Fubini und beweisen Sie die Legendresche Verdopplungsformel

$$\Gamma(\lambda) = \frac{2^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\lambda+1}{2}\Big) \qquad \big(\lambda \in (0,\infty)\big).$$

Lösung:

(d) Wir setzen Polarkoordinaten ein und bekommen mit Hilfe der Transformationsformel

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = \int_0^{\phi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr = \pi.$$

Es folgt, dass die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ integrierbar ist. Nach den Satz von Fubini gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\Big)^2$$

Beweisen Sie, dass

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr = \pi.$$

Wegen Symmetrie und mit Hilfe der Transformationsformel bekommen wir

$$\int_0^{\infty} e^{-cx^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{c}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{c}}$$

für alle $c > 0$. Wir verwenden jetzt die Identität aus (c) und bekommen

$$I(x) = \sqrt{x}\int_0^{\infty} e^{-x(u^2+2)}\, du = \sqrt{x}e^{-2x}\int_0^{\infty} e^{-xu^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}.$$

(e) Nach (d) und (1) gilt

$$e^{-x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{4t^2}}\, dt$$

Jetzt verwenden wir den Transformationsformel und substituieren $t = \sqrt{t'}$ und bekommen (2).

(g) Nach der Satz von Tonelli (Satz 1.7.6 im Skript von Soergel)

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\frac{e^{-t-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dt\, dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(0,\infty)^2} x^{\lambda-1}\frac{e^{-t-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, d(t,x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}\frac{e^{-t-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, dx\, dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx\, dt.\end{aligned}$$

Wir verwenden nochmals den Transformationsformel und substituieren $x = 2\sqrt{tx'}$ in das innere Integral und bekommen

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \frac{2^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^{\frac{\lambda+1}{2}-1}e^{-t}\, dt \int_0^{\infty} x^{\frac{\lambda}{2}-1}e^{-x}\, dx\\ &= \frac{2^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right).\end{aligned}$$