Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

5. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 5.2 Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx$. Ist das Ergebnis im Widerspruch zu dem Satz von Fubini?

Lösung: Es gilt

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\big(\frac{y}{x}\big) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = f(x, y) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy &= -\int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial y} \arctan(y) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} \arctan\big(\frac{y}{\epsilon}\big)\Big)\, dy \\
&= -\int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial y} \arctan(y) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + y^2}\Big)\, dy \\
&= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \arctan(y)\, dy \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy &= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \arctan(\frac{1}{x})\, dy \\
&= -\arctan(1) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \arctan\big(\frac{1}{\epsilon}\big) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nicht im Widerspruch zu dem Satz von Fubini da f nicht integrierbar auf $(0, 1) \times (0, 1)$ ist. Um zu beweisen, dass f nicht integrierbar ist, setzen wir Polarkoordinaten ein. Sei $B(0, 1)$ der Ball mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)^2} |f(x, y)|\, d(x, y) &\geq \int_{(0,1)^2 \cap B(0,1)} |f(x, y)|\, d(x, y) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \big|f\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big)\big|\, dr\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(2\phi)|\, d\phi \int_0^1 \frac{1}{r}\, dr \\
&= \infty.
\end{aligned}$$