

Analysis 3

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Sei (X, μ) ein Maßraum. Sei $1 < p < \infty$ und $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $f \in L^p(X)$ ein $g \in L^q(X)$ gibt mit $\|g\|_q = 1$ und

$$\|f\|_p = \left| \int_X fg \, \mu \right|.$$

Nehmen Sie dazu an, dass $\|f\|_p \neq 0$ und betrachten Sie einen Repräsentanten ϕ von f sowie die Abbildung

$$\chi : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \|f\|_p^{1-p} \frac{|\phi(x)|^p}{\phi(x)} & (\phi(x) \neq 0), \\ 0 & (\phi(x) = 0). \end{cases}$$

(b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$A = \left\{ \left| \int_X fg \, \mu \right| : g \in L^q(X), \|g\|_q = 1 \right\}$$

ein Maximum besitzt und

$$\|f\|_p = \max A.$$

(c) Für $f \in L^p(X)$ definieren wir

$$L_f : L^q(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_X fg \, \mu.$$

Beweisen Sie, dass für jede $f \in L^p(X)$ die Abbildung $L^q(X)$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^q(X)$ ist. Zeigen Sie, dass die Operatornorm von L_f gleich $\|f\|_p$ ist.

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $G = \{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ eine glatte Einparametergruppe von Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}^n$, d.h. für jede $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, sodass

$$\Phi_0 = \text{Id}$$

und

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

und die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \mapsto \Phi_t(x)$$

glatt ist. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld, das zu G gehört, d.h. das Vektorfeld, sodass

$$\partial_t \Phi_t(x) = \phi \circ \Phi_t(x) \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n).$$

- (a) Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Beweisen Sie die Identität

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(K)} f(x) dx = \int_{\Phi_t(K)} \left(Df(x)\phi(x) + f(x)\operatorname{div}\phi(x) \right) dx.$$

- (b) Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind.

- (i) Das Lebesguemaß ist G -invariant.
- (ii) $\operatorname{vol}_n(\Phi_t(K)) = \operatorname{vol}_n(K)$ für alle kompakte Teilmengen K von $\mathbb{R}^n$.
- (iii) $\operatorname{div}\phi = 0$.

Präsenzaufgabe 6.3 Sei $A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle} dx = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

Hausaufgabe 6.1 (Soergel, Übung 2.2.20) Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger integrierbar ist.

Hausaufgabe 6.2 Beweisen Sie: Für jeden Maßraum X ist der normierten Vektorraum $L^\infty(X)$ vollständig. Jede konvergente Folge in $L^\infty(X)$ besitzt des weiteren eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert.

Hausaufgabe 6.3 (Soergel, Übung 2.3.13) Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subseteq X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $L^p(X) \rightarrow L^1(E)$.

Hausaufgabe 6.4 Sei λ das Lebesguemaß auf $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und sei $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Gruppe aller Matrizen A mit $\det(A) \neq 0$. Bestimmen Sie eine Abbildung $f : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow (0, \infty)$, sodass das Maß μ gegeben durch

$$\mu(A) = \int_A f \lambda \quad (A \subseteq \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ Lebesgue-messbar})$$

$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ -invariant ist. *Hinweis: Betrachten Sie $\int_{g \cdot A} f \lambda$ für $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.*