

## Analysis 3

### 7. Übungsblatt *Ausgewählte Lösungen*

**Hausaufgabe 7.1** Sei  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein endlicher Maßraum. Sei  $1 < p < \infty$  und  $q = \frac{p}{p-1}$ . Für  $f \in L^p(X)$  sei

$$L_f : L^q(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_X fg \, \mu.$$

In Präsenzaufgabe 6.1 ist bewiesen worden (sogar ohne die Endlichkeitsbedingung auf  $\mu$ ), dass  $L_f$  ein stetiges lineares Funktional auf  $L^q(X)$  ist. Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass die Abbildung  $\Phi : f \mapsto L_f$  eine Bijektion von  $L^p(X)$  auf den Vektorraum  $L^q(X)'$  aller stetiger Funktionalen auf  $L^q(X)$  ist.

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung  $\Phi$  injektiv ist.

Betrachten Sie jetzt ein stetiges lineares Funktional  $T$  auf  $L^q(X)$ .

(b) Sei  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\nu(A) = T(\mathbf{1}_A) \quad (A \in \mathcal{M}).$$

Beweisen Sie, dass  $\nu$  ein komplexes Maß auf  $X$  ist.

(c) Beweisen Sie, dass es eine integrierbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, \mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

*Hinweis: Hausaufgabe 7.1.*

(d) Beweisen Sie die Identität

$$T(\phi) = \int_X \phi f \, \mu \quad (\phi \in L^\infty(X)).$$

*Hinweis: Zeigen Sie erst die Identität für meßbaren Stufenfunktionen. Zeigen Sie dann, dass es für jede  $\phi \in L^\infty(X)$  eine Folge  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  meßbarer Stufenfunktionen gibt, sodass  $\phi_k$  in  $L^\infty(X)$  gegen  $\phi$  konvergiert. Beweisen Sie, daß  $\phi_k$  auch in  $L^q(X)$  gegen  $\phi$  konvergiert.*

(e) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachten Sie

$$E_n := \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$$

sowie die Funktion

$$\chi_n : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \overline{f(x)}|f(x)|^{p-2} & (x \in E_n \text{ und } f(x) \neq 0), \\ 0 & (x \notin E_n \text{ oder } f(x) = 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $\chi_n \in L^\infty(X)$  und

$$\int_{E_n} |f|^p \, \mu = T(\chi_n) \leq \|T\|_{\text{op}} \left( \int_{E_n} |f|^p \, \mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Folgern Sie, dass  $f \in L^p(X)$ .

(f) Beweise Sie die Identität  $T = \Phi(f)$ . Folgern Sie, dass  $\Phi$  surjektiv ist.

*Lösung:*

(a) Sei  $f \in L^p(X)$  und sei  $\phi$  einen Repräsentant von  $f$  und sei  $\chi : X \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\chi(x) = \begin{cases} \overline{\phi(x)} |\phi(x)|^{p-2} & (\phi(x) \neq 0), \\ 0 & (\phi(x) = 0). \end{cases}$$

Da  $q(p-1) = p$ , gilt

$$\int_X |\chi(x)|^q d\mu(x) = \int_X |\phi(x)|^{q(p-1)} d\mu(x) = \int_X |\phi(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_p^p.$$

Es folgt, dass  $\chi$  ein Element  $g \in L^q(X)$  repräsentiert. Weiter gilt

$$L_f(g) = \int_X \phi(x) \chi(x) d\mu(x) = \int_X |\phi(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_p^p.$$

Wenn  $L_f = 0$ , dann  $\|f\|_p^p = 0$  und darum  $f = 0$ .

(b) Es gilt

$$\nu(\emptyset) = T(0) = 0.$$

Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von paarweisen disjunkten meßbaren Teilmengen von  $X$ . Sei  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  und  $B_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$  für  $N \in \mathbb{N}$ . Dann

$$|\nu(A \setminus B_N)| = |T(\mathbf{1}_{A \setminus B_N})| \leq \|T\|_{\text{op}} \|\mathbf{1}_{A \setminus B_N}\|_q \leq \|T\|_{\text{op}} \mu(A \setminus B_N)^{\frac{1}{q}}.$$

Weil

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A \setminus B_N) = \mu(\emptyset) = 0$$

folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\nu(A \setminus B_N)| = 0.$$

Da  $T$  linear ist, gilt für alle  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu(A) &= T(\mathbf{1}_A) = T(\mathbf{1}_{A \setminus B_N} + \mathbf{1}_{B_N}) = T(\mathbf{1}_{A \setminus B_N}) + T\left(\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n}\right) \\ &= T(\mathbf{1}_{A \setminus B_N}) + \sum_{n=1}^N T(\mathbf{1}_{A_n}) = \nu(A \setminus B_N) + \sum_{n=1}^N \nu(A_n). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\nu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \nu(A \setminus B_N) + \sum_{n=1}^N \nu(A_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_{\sigma(n)})$  ist gleich für alle Bijektionen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Nach dem Satz von Riemann (Satz 5.15 im Skript *Infinitesimalrechnung I und II* von Müller) ist die Summe absolut konvergent. Es folgt, dass  $\nu$  ein komplexes mass ist.

(c) Wenn  $A$  eine  $\mu$ -Nullmenge ist, dann ist die Funktion  $\mathbf{1}_A$   $\mu$ -fast überall 0. Darum repräsentiert  $\mathbf{1}_A$  das 0-Element in  $L^q(X)$  und es gilt  $\nu(A) = T(\mathbf{1}_A) = 0$ . Es folgt  $\nu \ll \mu$ . Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es eine integrierbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, sodass

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{M}).$$

(d) Für alle  $A \in \mathcal{M}$  gilt

$$T(\mathbf{1}_A) = \nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A f \mu.$$

Weil  $T$  und das Integral linear sind, gilt

$$T(\phi) = \int_X \phi f \mu$$

für alle meßbaren Stufenfunktionen  $\phi$ .

Sei  $\phi \in L^\infty(X)$  und sei  $\varphi$  einen Repräsentant von  $\phi$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\varphi_k = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{m}{k} + i \frac{n}{k} \right) \mathbf{1}_{[\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}) + i[\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k})} \circ \varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$$

Es gilt

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{k}.$$

Wenn  $\phi_k \in L^\infty(X)$  das von  $\varphi_k$  repräsentierte Element ist, dann gilt

$$\|\phi - \phi_k\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Es folgt

$$\left| \int_X \phi f \mu - \int_X \phi_k f \mu \right| \leq \int_X |\phi - \phi_k| |f| \mu \leq \|\phi - \phi_k\|_\infty \int_X |f| \mu \leq \frac{\sqrt{2}}{k} \|f\|_1.$$

Dies beweist, dass  $\int_X \phi_k f \mu$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\int_X \phi f \mu$  konvergiert. Andererseits gilt

$$\|\phi - \phi_k\|_q = \left( \int_X |\phi - \phi_k|^q \mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\phi - \phi_k\|_\infty^{\frac{1}{q}} \left( \int_X \mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(X)^{\frac{1}{q}}.$$

Dies beweist, dass  $\phi_k$  in  $L^q(X)$  gegen  $\phi$  konvergiert und damit

$$T(\phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\phi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \phi_k f \mu = \int_X \phi f \mu.$$

(e) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten

$$E_n := \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$$

sowie die Funktion

$$\chi_n : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} \overline{f(x)} |f(x)|^{p-2} & (x \in E_n \text{ und } f(x) \neq 0), \\ 0 & (x \notin E_n \text{ oder } f(x) = 0). \end{cases}$$

Wenn  $x \in E_n$ , dann  $|\chi_n(x)| = |f(x)|^{p-1}$ . Da  $p-1 > 0$ , gilt  $|\chi_n(x)| \leq n^{p-1}$ . Es folgt, dass  $\chi_n$  beschränkt ist und darum ein Element aus  $L^\infty(X)$  repräsentiert. Für dieses Element schreiben wir auch  $\chi_n$ . Nach (d) gilt

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |f|^p \mu &= \int_X \chi_n f \mu = T(\chi_n) \leq \|T\|_{\text{op}} \|\chi_n\|_q = \|T\|_{\text{op}} \left( \int_X |\chi_n|^q \mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|T\|_{\text{op}} \left( \int_{E_n} |f|^{(p-1)q} \mu \right)^{\frac{1}{q}} = \|T\|_{\text{op}} \left( \int_{E_n} |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Wir folgern, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\left( \int_{E_n} |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{E_n} |f|^p \mu \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \|T\|_{\text{op}}.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt

$$\left( \int_X |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{E_n} |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir schliessen  $\left( \int_X |f|^p \mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$  und damit  $f \in L^p(X)$ .

(f) Nach (b) – (e) gilt

$$T(g) = \Phi(f)(g) \quad (g \in L^\infty(X) \subseteq L^q(X)).$$

Weil  $L^\infty(X)$  alle meßbare Stufenfunktion enthält, ist  $L^\infty(X)$  eine dichte Teilmenge von  $L^q(X)$ . Sowohl  $T$  als auch  $\Phi(f)$  sind stetige Abbildungen  $L^q(X) \rightarrow \mathbb{C}$ . Darum werden  $T$  und  $\Phi(f)$  eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf  $L^\infty(X)$ . Es folgt, dass  $T = \Phi(f)$ .

Wir haben jetzt bewiesen, dass es für jede  $T \in L^q(X)'$  ein  $f \in L^p(X)$  gibt mit  $T = \Phi(f)$ . Wir schließen, dass  $\Phi$  surjektiv ist.