Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Betrachten Sie die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

$$C = \Big\{ \Big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big) \Big) : x \in (0,1] \Big\} \cup \{(0,0)\}$$

versehen mit der Teilraumtopologie. Beweisen Sie, dass C zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Präsenzaufgabe 8.2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass

$$\omega : (x,y) \mapsto f(x)\,dx + g(y)\,dy$$

eine geschlossene Pfaffsche Form auf $U \times U$ ist. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von ω.

Präsenzaufgabe 8.3 Sei ω die Pfaffsche Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Bestimmen Sie $\displaystyle\int_\gamma \omega$ für jede geschlossene stetig differenzierbare Kurve.

Präsenzaufgabe 8.4 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to U$, sei

$$\gamma^\vee : [a,b] \to U, \quad t \mapsto \gamma\big(b + a - t\big).$$

Zeigen Sie, dass $\gamma^\vee$ eine stetig differenzierbare Kurve mit

$$\int_{\gamma^\vee} \omega = -\int_\gamma \omega$$

für jede stetige Pfaffsche Form ω in U ist.

Hausaufgabe 8.1 Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ nicht sternförmig ist.

Hausaufgabe 8.2 [Forster Aufgabe 18.2] Im $\mathbb{R}^3$ sei α die Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\alpha(t) := \left(e^{t \sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos\frac{t}{2}\right) \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Man berechne die Integrale

$$\int_\alpha (x\,dx + y\,dy + z\,dz) \quad \text{und} \quad \int_\alpha z\,dy.$$

Hausaufgabe 8.3 Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1 : [0,1] \to U$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, sei

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 : [0,1] \to U, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ \gamma_2(2t-1) & \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\gamma_1 \circ \gamma_2$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist.

(b) Unter welche Bedingungen ist $\gamma_1 \circ \gamma_2$ stetig differenzierbar?

(c) Beweisen Sie für jede stetige Pfaffsche Form ω

$$\int_{\gamma_1 \circ \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

Hausaufgabe 8.4 [Forster Aufgabe 18.4] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $a \in U$ und $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine in $U \setminus \{a\}$ stetig differenzierbare geschlossene Pfaffsche Form, deren Koeffizienten f und g beschränkte Funktionen seien. Man beweise, dass ω eine Stammfunktion $F : U \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ besitzt, die sich stetig nach U fortsetzen lässt.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 8.1.2021, 9 Uhr via Panda.