Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Gegeben sei ein orientierter n-dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t. Für eine orientierte Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit

$$|t(v_i, v_j)| = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1, & (i = j), \end{cases}$$

sei

$$\omega = \omega_t := v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

(a) Zeigen Sie, dass ω unabhängig von der Wahl der orientierten t-orthogonalen Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Man erklärt für jedes $0 \leq p \leq n$ den Hodge-$*$-Operator

$$* = *_t : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$$

durch die Formel

$$\alpha \wedge *\beta = t(\alpha, \beta)\omega \qquad \big(\alpha, \beta \in \bigwedge^p V\big).$$

Hier ist t rechts zu verstehen als die Erweiterung der Bilinearform t auf p-Formen durch

$$t\big(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p, w_1' \wedge \cdots \wedge w_p'\big) := \det \begin{pmatrix} t(w_1, w_1') & t(w_1, w_2') & \ldots & t(w_1, w_p') \\ t(w_2, w_1') & t(w_2, w_2') & \ldots & t(w_2, w_p') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t(w_p, w_1') & t(w_p, w_2') & \ldots & t(w_p, w_p') \end{pmatrix},$$

für alle $w_1, \ldots, w_p, w_1', \ldots w_p' \in V$.

(b) Beweisen Sie, dass der Hodge-$*$-Operator ein linearer Isomorphismus $\bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ ist.

(c) Zeigen Sie unter Annahme, dass t ein Skalarprodukt auf V ist, dass der Hodge-$*$-Operator die lineare Abbildung $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ ist, die bestimmt wird durch

$$*\big(v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)}\big) = \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} \qquad (\sigma \in S_n).$$

Zeigen Sie weiter, dass $*(*\alpha) = (-1)^{p(n-p)}\alpha$ für alle $\alpha \in \bigwedge^p V$.

Betrachten Sie eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$. Für jede $p \in U$ versehen wir $T_p(U)^*$ mit dem standard Euklidischen Skalarprodukt. Wir definieren $d^* := * \circ d \circ *$ und den Hodge-Laplace-Operator

$$\Delta := d \circ d^* + d^* \circ d$$

(d) Zeigen Sie, dass Δ p-Formen auf p-Formen schickt. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Beweisen Sie die Identität

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Präsenzaufgabe 9.2 [Forster, 19.3] Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

In einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ seien Differentialformen

$$\omega = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$

gegeben. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$ und

$$\Phi^*\omega = g_1\, dr + g_2\, d\theta + g_3\, d\phi.$$

Man berechne die Funktionen $g_j : V \to \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 9.1 [Soergel, Ergänzende Übung 6.9.20 (Die Maxwell'schen Gleichungen)] Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit x, y, z, t und betrachten auf dem $\mathbb{R}^4$ oder allgemeiner einer halboffenen Teilmenge desselben eine glatte 2-Form

$$F = E_1\, dx \wedge dt + E_2\, dy \wedge dt + E_3\, dz \wedge dt + B_1\, dy \wedge dz + B_2\, dz \wedge dx + B_3\, dx \wedge dy$$

Beweisen Sie, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ist. Hier ist $\operatorname{rot} E$ der Rotation von E

$$\operatorname{rot} E = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{div} B$ der Divergenz von B

$$\operatorname{div}(B) = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}.$$

Leser mit physikalischer Vorbildung erkennen die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum. Betrachten wir zusätzlich die sogenannte *Lorentzmetrik*

$$l := dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz - c^2 dt \otimes dt$$

mit einer reellen Konstante $c > 0$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $d(*_l F) = 0$ äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

ist.

Hausaufgabe 9.2 [Forster, 19.3] Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

In einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ seien Differentialformen

$$\omega = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy$$

gegeben. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$ und

$$\Phi^*\omega = G_1\, d\theta \wedge d\phi + G_2\, d\phi \wedge dr + G_3\, dr \wedge d\theta.$$

Man berechne die Funktionen $G_j : V \to \mathbb{R}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 15.1.2021, 9 Uhr via Panda.