Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2020 - 2021

Analysis 3

9. Übungsblatt

Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 9.1 [Soergel, Ergänzende Übung 6.9.20 (Die Maxwell'schen Gleichungen)] Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit x, y, z, t und betrachten auf dem $\mathbb{R}^4$ oder allgemeiner einer halboffenen Teilmenge desselben eine glatte 2-Form

$$F = E_1\, dx \wedge dt + E_2\, dy \wedge dt + E_3\, dz \wedge dt + B_1\, dy \wedge dz + B_2\, dz \wedge dx + B_3\, dx \wedge dy$$

Beweisen Sie, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ist. Hier ist $\operatorname{rot} E$ der Rotation von E

$$\operatorname{rot} E = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{div} B$ der Divergenz von B

$$\operatorname{div}(B) = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}.$$

Leser mit physikalischer Vorbildung erkennen die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum. Betrachten wir zusätzlich die sogenannte *Lorentzmetrik*

$$l := dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz - c^2 dt \otimes dt$$

mit einer reellen Konstante $c > 0$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $d(*_l F) = 0$ äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

ist.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} dF = {} & \partial_2 E_1\, dy \wedge dx \wedge dt + \partial_3 E_1\, dz \wedge dx \wedge dt \\ & + \partial_1 E_2\, dx \wedge dy \wedge dt + \partial_3 E_2\, dz \wedge dy \wedge dt \\ & + \partial_1 E_3\, dx \wedge dz \wedge dt + \partial_2 E_3\, dy \wedge dz \wedge dt \\ & + \partial_1 B_1\, dx \wedge dy \wedge dz + \partial_4 B_1\, dt \wedge dy \wedge dz \\ & + \partial_2 B_2\, dy \wedge dz \wedge dx + \partial_4 B_2\, dt \wedge dz \wedge dx \\ & + \partial_3 B_3\, dz \wedge dx \wedge dy + \partial_4 B_3\, dt \wedge dx \wedge dy \\ = {} & \operatorname{div} B\, dx \wedge dy \wedge dz + \Big(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_4 B_1\Big)\, dy \wedge dz \wedge dt \\ & + \Big(-\partial_3 E_1 + \partial_1 E_3 - \partial_4 B_2\Big)\, dx \wedge dz \wedge dt + \Big(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_4 B_3\Big)\, dx \wedge dy \wedge dt \end{aligned}$$

Es folgt, dass $dF = 0$ die Gleichungen $\mathrm{div} B = 0$ und $\mathrm{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ impliziert.

In eineim punkt p ist die symmetrische Bilinearform l gegeben durch

$$l_p(X, Y) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 - c^2X_4Y_4 \qquad (X, Y \in \mathbb{R}^4).$$

Sei $\tilde{l}_x$ die symmetrische Bilinearform auf dem Dualraum $(\mathbb{R}^4)^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{l}_p(dx_p, dx_p) &= l_p(e_1, e_1) = 1 \\
\tilde{l}_p(dy_p, dy_p) &= l_p(e_2, e_2) = 1 \\
\tilde{l}_p(dz_p, dz_p) &= l_p(e_3, e_3) = 1 \\
\tilde{l}_p(c\,dt_p, c\,dt_p) &= l_p\big(\frac{1}{c}e_4, \frac{1}{c}e_4\big) = -1
\end{aligned}$$

Wir wählen $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge c\,dt$. Es gilt

$$\tilde{l}(dx \wedge dy, dx \wedge dy) = \tilde{l}(dx \wedge dz, dx \wedge dz) = \tilde{l}(dy \wedge dz, dy \wedge dz) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

und

$$\tilde{l}(dx\wedge c\,dt, dx\wedge c\,dt) = \tilde{l}(dy\wedge c\,dt, dy\wedge c\,dt) = \tilde{l}(dz\wedge c\,dt, dz\wedge c\,dt) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Es ist jetzt einfach zu sehen, dass

$$\begin{aligned}
*\,(dx \wedge dy) &= dz \wedge c\,dt, \\
*\,(dx \wedge dz) &= -dy \wedge c\,dt, \\
*\,(dy \wedge dz) &= dx \wedge c\,dt, \\
*\,(dx \wedge c\,dt) &= -dy \wedge dz, \\
*\,(dy \wedge c\,dt) &= dx \wedge dz, \\
*\,(dz \wedge c\,dt) &= -dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$*F = -\frac{1}{c}E_1\,dy\wedge dz + \frac{1}{c}E_2\,dx\wedge dz - \frac{1}{c}E_3\,dx\wedge dy + B_1\,dx\wedge c\,dt + B_2\,dy\wedge c\,dt + B_3\,dz\wedge c\,dt$$

und damit

$$\begin{aligned}
d(*F) = &-\frac{1}{c}\Big(\partial_1E_1\,dx \wedge dy \wedge dz + \partial_4E_1\,dt \wedge dy \wedge dz\Big) \\
&+ \frac{1}{c}\Big(\partial_2E_2\,dy \wedge dx \wedge dz + \partial_4E_2\,dt \wedge dx \wedge dz\Big) \\
&- \frac{1}{c}\Big(\partial_3E_3\,dz \wedge dx \wedge dy + \partial_4E_3\,dt \wedge dx \wedge dy\Big) \\
&+ c\Big(\partial_2B_1\,dy \wedge dx \wedge dt + \partial_3B_1\,dz \wedge dx \wedge dt\Big) \\
&+ c\Big(\partial_1B_2\,dx \wedge dy \wedge dt + \partial_3B_2\,dz \wedge dy \wedge dt\Big) \\
&+ c\Big(\partial_1B_3\,dx \wedge dz \wedge dt + \partial_2B_3\,dy \wedge dz \wedge dt\Big) \\
= &-\frac{1}{c}\mathrm{div}E\,dx \wedge dy \wedge dz \\
&+ \Big(c\partial_2B_3 - c\partial_3B_2 - \frac{1}{c}\partial_4E_1\Big)\,dy \wedge dz \wedge dt \\
&+ \Big(c\partial_1B_3 - c\partial_3B_1 + \frac{1}{c}\partial_4E_2\Big)\,dx \wedge dz \wedge dt \\
&+ \Big(c\partial_1B_2 - c\partial_2B_1 - \frac{1}{c}\partial_4E_3\Big)\,dx \wedge dy \wedge dt
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $d(*F) = 0$ die Gleichungen $\mathrm{div}E = 0$ und $\mathrm{rot}B = \frac{1}{c^2}\partial_t E$ impliziert.