

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 1.[10 Punkte] Der *Betrag* einer rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ist definiert als die nicht-negative Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(ii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(*Hinweis:* Die erste Ungleichung wird „Dreiecksungleichung“ und die zweite „umgekehrte Dreiecksungleichung“ genannt.)

Gilt auch $||x| - |y|| \leq |x + y|$?

Aufgabe 2.[10 Punkte] Es sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$ mit $1 + x > 0$ und $1 + y > 0$. Zeigen Sie, dass

$$x < y \iff \frac{1 - x}{1 + x} > \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Aufgabe 3.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n > \binom{n}{2} x^2 \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

gilt. (*Hinweis:* Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Annahmen $x > 0$ für die erste Ungleichung und die Annahme $n \geq 2$ für die zweite Ungleichung.)

Aufgabe 4.[10 Punkte]

- (a) Bestimmen Sie für die folgenden Werte von b natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \dots, c_N \in \{0, \dots, b - 1\}$ derart, dass

$$789 = c_0 + c_1 b + \dots + c_N b^N.$$

(i) $b = 2$;

(ii) $b = 5$;

(iii) $b = 9$.

- (b) Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \dots, c_N \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ existieren, sodass gilt

$$x = c_0 + c_1 b + \dots + c_N b^N.$$

(*Hinweis:* Für die Eindeutigkeit können Sie entweder die Eindeutigkeit der Division mit Rest oder Präsenzaufgabe 4 verwenden.)

Abgabe: Sonntag, 26.04.2026, 23:59 Uhr