Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 17.04.2026
Blatt 1

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 1.[10 Punkte] Der *Betrag* einer rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ ist definiert als die nicht-negative Zahl

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

(ii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

(*Hinweis:* Die erste Ungleichung wird „Dreiecksungleichung“ und die zweite „umgekehrte Dreiecksungleichung“ genannt.)

Gilt auch $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$?

Lösung. Wir zeigen zunächst (i). Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ beliebig. Aus Präsenzaufgabe 1 wissen wir, dass $|z| = \max\{z, -z\}$ für alle $z \in \mathbb{Q}$. Insbesondere gilt $|z| = |-z|$, $z \leq |z|$ und $-z \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{Q}$. Nach Präsenzaufgabe 2(v) gilt

$$x + y \leq |x| + |y|$$

und

$$-(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|.$$

Daraus folgt $|x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\} \leq |x| + |y|$.
Teil (ii) ergibt sich aus (i) wie folgt: Für $x, y \in \mathbb{Q}$ rechnen wir

$$|x| = |x-y+y| \overset{\text{(i)}}{\leq} |x-y| + |y|. \tag{1}$$

Subtrahieren von $|y|$ auf beiden Seiten liefert $|x| - |y| \overset{(1)}{\leq} |x-y| + |y| - |y| = |x-y|$. Vertauschen der Rollen von x und y liefert $|y| - |x| \leq |y-x|$ und somit

$$-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y-x| = |-(y-x)| = |x-y|.$$

Zusammen ergibt sich $\big||x| - |y|\big| = \max\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} \leq |x-y|$.
Wegen $|y| = |-y|$ gilt schließlich

$$\big||x| - |y|\big| = \big||x| - |-y|\big| \overset{\text{(ii)}}{\leq} |x - (-y)| = |x+y|.$$

Aufgabe 2.[10 Punkte] Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$ mit $1+x>0$ und $1+y>0$. Zeigen Sie, dass

$$x<y \iff \frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y}.$$

Lösung. Nach Präsenzaufgabe 2(ii) gilt $(1+x)(1+y)>0$ und nach Präsenzaufgabe 2(iv) gilt $\frac{1}{2}>0$ (denn wegen $1>0$ gilt $2=1+1>1+0=1$). Wir erhalten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y} &\overset{\text{PA 2(ii)}}{\iff} \frac{1-x}{1+x}\cdot(1+x)(1+y) > \frac{1-y}{1+y}\cdot(1+x)(1+y)\\
&\iff (1-x)(1+y) > (1-y)(1+x)\\
&\iff 1-x+y-xy > 1-y+x-yx\\
&\overset{(*)}{\iff} -x+y > -y+x\\
&\overset{(*)}{\iff} -x+y+x+y > -y+x+x+y\\
&\iff 2y > 2x\\
&\overset{\text{PA 2(ii)}}{\iff} \frac{1}{2}\cdot 2y > \frac{1}{2}\cdot 2x\\
&\iff y > x.
\end{aligned}$$

Die mit $(*)$ gekennzeichneten Äquivalenzen sind von der Form $a>b \iff a+c>b+c$, was unmittelbar aus der Definition von „$<$" folgt.

Aufgabe 3.[10 Punkte] Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x>0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > \binom{n}{2}x^2 \geq \frac{n^2}{4}x^2$$

gilt. (*Hinweis:* Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Annahmen $x>0$ für die erste Ungleichung und die Annahme $n \geq 2$ für die zweite Ungleichung.)

Lösung. Aus dem binomischen Lehrsatz ergibt sich

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = \binom{n}{2}x^2 + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{n}\binom{n}{i}x^i.$$

Aus $x>0$ und $\binom{n}{i}>0$ folgt $\binom{n}{i}x^i>0$ für alle $i=0,\ldots,n$ mit Präsenzaufgabe 2(ii). Aus Präsenzaufgabe 2(v) ergibt sich nun $\sum_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{n}\binom{n}{i}x^i>0$ und folglich

$$(1+x)^n = \binom{n}{2}x^2 + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{n}\binom{n}{i}x^i > \binom{n}{2}x^2.$$

Für die Ungleichung $\binom{n}{2}x^2 \geq \frac{n^2}{4}x^2$ bemerken wir zunächst, dass $n \geq 2$ gilt. Nun gelten die Implikationen

$$\begin{aligned}
n \geq 2 &\implies n^2 \geq 2n && \text{(PA 2(ii))}\\
&\implies 2n^2-2n = n^2+(n^2-2n) \geq 2n+(n^2-2n) = n^2 && \text{(PA 2(v))}\\
&\implies \frac{n^2-n}{2} = \frac{1}{4}\cdot(2n^2-2n) \geq \frac{1}{4}\cdot n^2 && \text{(PA 2(ii))}
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \geq \frac{n^2}{4}$ und somit, wegen $x^2>0$, auch $\binom{n}{2}x^2 \geq \frac{n^2}{4}x^2$.

Aufgabe 4.[10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Werte von b natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \dots, c_N \in \{0, \dots, b-1\}$ derart, dass

$$789 = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N.$$

(i) $b = 2$;

(ii) $b = 5$;

(iii) $b = 9$.

(b) Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, \dots, c_N \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ existieren, sodass gilt

$$x = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N.$$

(*Hinweis:* Für die Eindeutigkeit können Sie entweder die Eindeutigkeit der Division mit Rest oder Präsenzaufgabe 4 verwenden.)

Lösung.

(a) Für $b = 2$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
789 &= 394 \cdot 2 + 1 \\
394 &= 197 \cdot 2 + 0 \\
197 &= 98 \cdot 2 + 1 \\
98 &= 49 \cdot 2 + 0 \\
49 &= 24 \cdot 2 + 0 \\
24 &= 12 \cdot 2 + 0 \\
12 &= 6 \cdot 2 + 0 \\
6 &= 3 \cdot 2 + 0 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1.
\end{aligned}$$

Also gilt $N = 9$ und

$$789 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9.$$

Für $b = 5$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
789 &= 157 \cdot 5 + 4 \\
157 &= 31 \cdot 5 + 2 \\
31 &= 6 \cdot 5 + 1 \\
6 &= 1 \cdot 5 + 1 \\
1 &= 0 \cdot 5 + 1.
\end{aligned}$$

Also gilt $N = 4$ und

$$789 = 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4.$$

Für $b = 9$ rechnen wir

$$\begin{aligned} 789 &= 87 \cdot 9 + 6 \\ 87 &= 9 \cdot 9 + 6 \\ 9 &= 1 \cdot 9 + 0 \\ 1 &= 0 \cdot 9 + 1. \end{aligned}$$

Also gilt $N = 3$ und

$$789 = 6 + 6 \cdot 9 + 0 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^3.$$

(b) Wir zeigen zunächst die *Existenz* durch Induktion nach x. Falls $x < b$, so gilt $N = 0$ und $x = c_0$. Es sei nun $x \geq b$ beliebig. Wir teilen x mit Rest durch b und erhalten $x' \in \mathbb{N}$ und $c_0 \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ mit $x = x' \cdot b + c_0$. Nun gilt

$$x' < x' \cdot b \leq x' \cdot b + c_0 = x.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren $c_1, \dots, c_N \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ derart, dass $x' = c_1 + c_2 b + \cdots + c_N b^{N-1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= c_0 + x'b = c_0 + (c_1 + c_2 b + \cdots + c_N b^{N-1}) \cdot b \\ &= c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_N b^N. \end{aligned}$$

Nun zur *Eindeutigkeit*: Es sei $x \in \mathbb{N}_0$ minimal derart, dass $c_0, \dots, c_N, c'_0, \dots, c'_M \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ existieren mit

$$x = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N = c'_0 + c'_1 b + \cdots + c'_M b^M.$$

Für einen Widerspruch nehmen wir an, es existiert ein $i \leq \min\{N, M\}$ minimal mit $c_i \neq c'_i$. Dann besitzt $x - (c_0 + \cdots + c_{i-1} b^{i-1})$ die beiden Darstellungen

$$y \coloneqq c_i b^i + \cdots + c_N b^N = c'_i b^i + \cdots + c'_M b^M$$

Aus der Minimalität von x folgt $y = x$. Aus der Eindeutigkeit der Division mit Rest erhalten wir $c_i = c'_i$ im Widerspruch zu $c_i \neq c'_i$. Also gilt $c_i = c'_i$ für alle i, und insbesondere $N = M$. Dies zeigt die Eindeutigkeit der Darstellung von x.

Alternativ zeigt man die *Eindeutigkeit* wie folgt: Angenommen, es existiert ein $x \in \mathbb{N}_0$ derart, dass zwei verschiedene Darstellungen

$$x = c_0 + c_1 b + \cdots + c_N b^N = c'_0 + c'_1 b + \cdots + c'_N b^N$$

existieren mit $c_N \neq c'_N$. Subtrahieren beider Darstellungen liefert $0 = \sum_{i=0}^{N} (c_i - c'_i) b^i$ und somit

$$(c'_N - c_N) b^N = \sum_{i=0}^{N-1} (c_i - c'_i) b^i,$$

wobei $1 \leq |c'_N - c_N|$. Mit den Präsenzaufgaben 1, 2 und 4 ergibt sich nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} b^N \leq |c'_N - c_N| b^N &= |(c'_N - c_N) b^N| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} (c_i - c'_i) b^i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} |(c_i - c'_i) b^i| = \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - c'_i| \cdot b^i \leq b^N - 1. \end{aligned}$$

Dies liefert den Widerspruch $b^N \leq b^N - 1$. Also war die Annahme falsch und die Darstellung wie oben ist eindeutig.

Abgabe: Sonntag, 26.04.2026, 23:59 Uhr