Institut für Mathematik
der Universität Paderborn
Dr. J. Kuit und Dr. C. Heyer

SoSe 2026
Freitag, 24.04.2026
Blatt 2

Übungen zur Analysis für Informatik

Aufgabe 5.[10 Punkte] Bestimmen Sie, falls existent, das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (in $\mathbb{R}$) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(i) $M_1 = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$;

(iii) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$;

(iv) $M_4 = \left\{\frac{n}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(v) $M_5 = \left\{\frac{m^2}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(*Hinweis:* Es darf benutzt werden, dass zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.)

Aufgabe 6.[10 Punkte] Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$. Zeigen Sie, dass $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$.

Aufgabe 7.[10 Punkte] Zeigen Sie die folgenden Identitäten in $\mathbb{R}$:

(i) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48} = 8$;

(ii) $\sqrt[9]{\sum_{j=0}^{18} \binom{18}{j} 2^j} = 9$;

(iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{216}} + \left(\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt{25}}\right)^{-1}\right)^2} = 1$;

(iv) $\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j\right)^2 = \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}+(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (*Hinweis:* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ gilt die geometrische Summe: $\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.)

Aufgabe 8.[10 Punkte] Zeigen Sie die *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt und dass alle x_i ungleich Null sind. Zeige mithilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a} \right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei $x_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ das arithmetische Mittel ist. Folgern Sie daraus den Induktionsschritt.)

Abgabe: Sonntag, 03.05.2026, 23:59 Uhr